த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்:—385

நிலையியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
தி. கோவிந்தராஜன், எம்.ஏ., எல்.டி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அரசினர் கலைக்கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition— December 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 385

STATICS for B.Sc. (Major)

T. GOVINDARAJAN

Price Rs. 9-65

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises
1, Smith Lane, Mount Road,
Madras-2.

அணிந்துரை

திரு இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**நிலையியல்**' என்ற இந் நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **385** ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **420** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில், பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. தோற்றுவாய்

1-1. நியூட்டன் கண்ட மூன்று இயக்க விதிகளின் அடிப்படையில் இயக்கவியலும் நிலையியலும் அமைகின்றன. அவ் விதிகளாவன :

1. அமைதி நிலையிலிருக்கும் ஒரு பொருள் வேறு வெளி விசை எதுவும் அப் பொருளைத் தாக்காத வரையில் அமைதி நிலையிலேயே இருக்கும்; ஒரு சீரான வேகத்தில் ஒரு நேர் கோட்டில் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு பொருள் வேறு வெளி விசை யெதுவும் அப்பொருளைத் தாக்காத வரையில் அதே சீரான வேகத்தில் அதே நேர்கோட்டில் சென்று கொண்டிருக்கும். (இது நிலைபொருள் விதி எனப்படும்—Law of Inertia.)

2, உந்தமாறு வீதம் (Rate of change of momentum) வெளி விசைக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்; இம் மாற்றம் வெளி விசையின் திசையிலே ஏற்படும்.

3. வினையும் (அல்லது விசையும்—action), எதிர்வினையும் (அல்லது எதிர்விசையும்—reaction) நேரெதிர்த் திசைகளில் சம அளவுடையதாயிருக்கும்.

1–1.1. விசைகள் பொதுவாக ஒரு பொருளின்மேல் செயற்படும்போது, அப் பொருள் இயங்கலாம்; அல்லது அவ் விசைகள் தம்மிடையே எதிரீடு செய்துகொள்ளும் வகையில் அமைந்திருந்தால், அதன் காரணமாக அப்பொருள் அசைவற்று இருக்கலாம். விசைகளால் ஏற்படும் இயக்கங்களை ஆய்வது இயங்கியல் (Dynamics) பகுதிக்குரியது; விசைகளால் தாக்கப்பட்ட பொருள்கள் இடம் மாருது அசைவற்ற நிலையில் இருப்பதைப்பற்றி ஆய்வது நிலையியல் (Statics) பகுதிக்குரியது. இவ் விரு இயல்

களும் ஒருங்கே நிலையியக்கவியல் அல்லது இயந்திரவியல் (Mechanics) என்ற பெரும் பகுதியின் இரு பிரிவுகளாகும். இந் நூல் நிலையியல் பற்றியதாகும். முதன்முதலாகச் சில வரை யறைகளோடு நிலையியல் ஆய்வைத் தொடங்குவோம்.

1–2. (*i*) **துகள்** (Particle): ஒரு பொருளின் மிக நுண்ணிய பகுதி துகள் எனப்படும். அதன் நுண்மையைக் கற்பனை செய்து தான் பார்க்க முடியும். அதாவது ஒரு துகளின் ஒரு பாகத் திற்கும் மற்றொரு பாகத்திற்கும் உள்ள தூரம் பூச்சியம் என்று வரையறுக்கப்படும். ஆனால் அத் துகளுக்கு ஒரு பொருண்மை (mass) உண்டு. ஒரு பொருள் (a body) என்பது எண்ணற்ற துகள்களாலாயது.

(*ii*) **அமைதி நிலை** (Rest): சுற்றுப்புறத்திலுள்ள பொருள் களைச் சார்ந்து ஒரு பொருள் அமைதியாக (தன் இடம் பெய ராது) இருக்கும் நிலை அமைதி நிலை எனப்படும்.

விளக்கம் : இம் மண்ணுலகம் இயங்கிக்கொண்டே இருக் கிறது. அது தன்னச்சை மையங்கொண்டும், கதிரவனை மைய கொண்டும் இயங்கும்போது, உலகத்துப் பொருள்கள் யா கூடவே இயங்குகின்றன. ஆனால், நமது வீட்டிலிருக்கும் நாற் காலி, பக்கத்திலிருக்கும் மேசையை யொட்டி, இன்னும் மற்றப் பொருள்களையொட்டி அமைதியாகவே தன் இடம் பெயராது இருப்பதைப் பார்க்கிறோம். இதுவே அமைதி நிலை எனப்படும். உண்மையாக இதைச் 'சார் அமைதி' (Relative rest) என்று கொள்வது பொருந்துமாயினும், இதைத்தான் நாம் 'அமைதி' அல்லது ''அமைதி நிலை'' (State of Rest) எனக் கொள்கிறோம்.

(*iii*) **விசை**: ஒரு பொருளின் அமைதி நிலையைக் குலைப்பது அல்லது குலைக்க முற்படுவது எதுவோ, அதுவே விசை எனப்படும்; அது மட்டுமல்ல, ஒரு நேர்கோட்டில் சீரான வேகத்தில் போய்க்கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளின் சீரான வேகத்தை மாற்ற அல்லது மாற்ற முற்படுவது எதுவோ, அதுவும் விசை எனப்படும். நியூட்டன் இயக்க விதிகளின் முதல் விதியான [1-1 (i)] நிலைபொருள் விதியின் அடிப்படை யில் 'விசை'யின் வரையறை உருவாவது காண்க.

(*iv*) **சம விசைகள்**: நேரெதிர்த் திசைகளில் இரு விசை களால் தாக்கப்படும் ஒரு துகள் தன் அமைதி நிலை குலையாது அசைவற்று இருப்பின் அவ்விரு விசைகளும் சம விசைகள்

எனக் கூறப்படும் (விசையளவு சமமானுல் நேரெதிர்த் திசைகள்).

(v) **பொருண்மை** (Mass): ஒரு பொருளில் உள்ள பருப் பொருளின் அளவு அதன் பொருண்மை யெனப்படும்.

இந்தியாவில் வழக்கத்திலிருக்கும் பொருண்மையலகு **கிராம்** (gram) என்பதாம்; 1000 கிராம்கள் கொண்டது ஒரு கிலோகிராம் என வழக்கிலிருக்கும் ஒரு பேரலகு. இவ்வலகான கிராம் என்பது C.G.S எனப்படும் சென்டி மீட்டர்—கிராம்—செகண்டு என்ற அமைப்பின் பாற்படும். மற்ருேர் அமைப்பு F.P.S. எனப்படும் அடி—பவுண்டு—செகண்டு என்பதாம். இவ்விரு அமைப்புகளான C.G.S. அமைப்பும், F.P.S. அமைப்பும் விஞ்ஞானத்துறையில் பயன்படுத்தப்படும் அலகு முறைகளாகும்.

(vi) **எடை** (Weight): ஒரு பொருளை எந்த விசையோடு மண்ணுலகம் ஈர்க்கிறதோ (புவியீர்ப்பு), அவ்விசையானது அப்பொருளின் எடை எனப்படும்.

குறிப்பு: ஒரு பொருளைத் தூக்கும்போது அது பளுவாக இருக்கிறதா, இலேசாக இருக்கிறதா என்ற அடிப்படையில் அப்பொருளின் எடை அதிகம், குறைவு என நாம் நடைமுறையில் பேசுகிருேம்.

இயக்கவியலில் ஒரு பொருளின் பொருண்மைக்கும், எடைக்கும் உள்ள நுணுக்கமான வேறுபாடு விளக்கப்பட்டிருக்கும். ஒரு பொருளின் பொருண்மை மாருது. ஆனுல், ஒரு பொருளின் எடை கடல்மட்டத்தில் ஒரு மதிப்புப் பெறும்; அதே பொருளை நாம் வானக் கப்பலில் உயர இருக்கும்போது எடை போட்டால், குறைவான மதிப்பிருக்கும். நாம் கடல் மட்டத்திலிருந்து உயரச் செல்லச் செல்ல, இப் புவியீர்க்கும் விசை குறைகிறது; எனவே, அப் பொருளின் எடையும் குறைகிறது. அதே பொருளைச் சந்திரன்மேல் எடை போட்டால், புவிமட்டத்தின் மேலுள்ள எடையைப் போல் ஆறிலொரு பங்குதான் இருக்கும் என்று கூறுவர். ஆனுல், பொருளின் பொருண்மை மாருதிருக்கும்.

(vii) **கட்டிறுக்கப் பொருள்** (Rigid body): ஒரு பொருளின் வெவ்வேறு பாகங்கள் ஒன்றையொன்று சார்ந்த நிலையில் தங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரங்கள் மாருத வகையில்

உறுதி பெற்றிருக்குமாயின், அது கட்டிறுக்கப் பொருள் எனப்படும் (கட்டுறுதிப் பொருளெனவும் கூறலாம்). ஆனால், இந்த வகையான ஒரு பொருள் இயற்கையில் இருக்க முடியாது; எந்தப் பொருளும் ஒரு விசைக்கு உட்படும்போது நுண்ணிய அளவு சுருங்கலாம் அல்லது நீளலாம்; எனினும் அச் சுருக்கமோ, நீட்சியோ மிகமிக நுண்ணியதாய், கணக்கிட முடியாத அளவு குறைவாய் இருக்குமாயின், அஃது ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் என ஏற்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இரும்புத் தண்டவாளம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளெனக் கொள்ளப்படலாம்; மாறாக ஓர் இரப்பர் கயிறு கட்டிறுக்கப்பொருளன்று. நாம் நிலையியலில் காணவிருக்கும் பொருள்கள் பலவற்றைச் சரியான கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் என்றே ஏற்றுக் கொள்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஏணி, சங்கிலி, கோளம் முதலியன யாவற்றையும் கட்டுறுதிப் பொருள்களென ஏற்றுக்கொள்கிறோம்.

1–3. விசை—உருவமைப்பு (Representation)

நியூட்டனின் முதல் விதியின் அடிப்படையில் விசையெனில் என்னவென 1–2 (iii)–ல் வரையறுத்தோம். ஒரு விசையை உருவமைத்துக் காட்டுவதெப்படி? ஒரு விசையின் (1) அளவு, (2) திசை, (3) செயற்படும் புள்ளி என்ற மூன்றும் நமக்குத் தெரிந்தால், அவ் விசையைப்பற்றி முழு விவரமும் நமக்குக் கிடைக்கிறது. எனவே, விசை செயற்படும் புள்ளியிலிருந்து அந்த விசை இயங்கும் திசைப்பக்கம் ஒரு நேர்கோடு வரைந்து, ஒரு வசதியான அளவுச் சட்டப்படி, அந்த விசையின் அளவைக் குறிப்பிட்டால் அந் நேர்கோடு அந்த விசையை முழுதும் உருவமைத்துக் காட்டும். இவ் உரு அமைப்புக்கு முழுதும் பொருத்தமானவை வெக்டர்கள். வெக்டர் என்றால் என்ன வென்றும், நமக்கு நிலையியலில் தேவைப்படுமளவு, வெக்டர்களைப் பற்றிய சில பண்புகளையும் தேற்றங்களையும், அடுத்த பகுதியில் 'வெக்டரியல்' என்ற தலைப்பில் பார்ப்போம்.

பயிற்சி I

1. நியூட்டனின் மூன்று இயக்க விதிகளைக் கூறுக.
2. 'விசை' யென்றால் என்ன? வரையறுக்க.

2. வெக்டரியல்

(Vector Algebra)

2 1. வெக்டர் என்றால் என்ன ?

ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு உடைய ஒன்றினை "வெக்டர்" எனக் கூறலாம். இது ஒரு பொதுப் பெயர்.

2-1.1. அளவை (Scalar)*: வெக்டரின் பண்புகளை முற்றிலும் அறிய வெக்டர்களின் ஒரே ஒரு பண்பினைமட்டுமுடைய **அளவை** (scalar) என்ற மற்றொன்றை நாம் புரிந்துகொண்டால், வெக்டரின் தனிச் சிறப்புகள் நமக்குப் புரியும். திசையற்ற, ஆனால் அளவுடைய ஒன்றினை நாம் **அளவை** என வரையறுக்கிறோம். நீளம், பரப்பு, கொள்ளளவு, பொருண்மை, காலம், வெப்பநிலை முதலியவை அளவை இராசிகளாகும் (scalar quantities). இப்படிப்பட்ட **அளவை** இராசிகள் சாதாரணமாக நாம் இயற்கணிதத்தில் அறிந்த கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் முதலிய விதிகளுக்குட்பட்டவை. எடுத்துக்காட்டாக a, b, c, என்பவை ஒரே இன அளவை இராசிகளானால்,

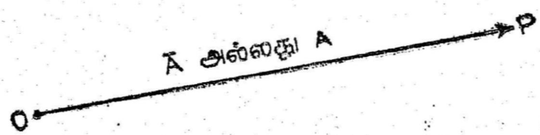
$$a+b = b+a$$
$$a+(b+c) = (a+b)+c$$
$$a(b+c) = ab+ac$$
$$ab=ba=b\,.\,a=a\,.\,b=a\times b=b\times a.$$

---

* 'Scalar' எனில் திசையிலி அல்லது எண்ணி என்றும், 'Scalar quantity எனில் எண் கணியம் என்றும் வழக்கில் இருக்கிறது. 'எண்ணி' என்ற சொல் மற்றச் சொற்களோடு சேர்ந்து வரும்போது, சில சில நேரங்களில் இரட்டித்த பொருள்களைத் தரக்கூடுமாதலால், இந்நூலில் 'Scalar' என்ற சொல்லுக்கு 'அளவை' என்ற சொல் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பது கவனத்தில் இருக்கட்டும்.

2–1.2. வெக்டர் உருவமைப்பு (Representation of a Vector)

ஓர் அம்புக் குறியால் திசைகாட்டி, ஓர் அளவுச் சட்டத்தின் படி, அளவு காட்டி நிற்கும் ஒரு நேர்கோடு, ஒரு வெக்டரின் உருவமைப்பாகும். சுருக்கமாக ஒரு திசை கொண்ட நேர் கோட்டுத் துண்டம் (Directed line Segment) ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும். இதைக் கோட்டமை வெக்டர் (line vector) எனவும் கூறுவதுண்டு. படம் 2–1.2–ல் *OP* ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்.



படம் 2-1.2.

ஆரம்பமுனை O என்பது ஆதிப்புள்ளி எனவும், இறுதி முனை P என்பது இறுதிப் புள்ளி எனவும் கூறப்படும். O-விலிருந்து P–க்குச் செல்லும் திசை, அவ் வெக்டரின் திசையைக் குறிக்கும்; குறிப்பிட்ட அளவுச் சட்டப்படி OP–யின் நீளம், அவ் வெக்டரின் அளவைக் குறிக்கும்.

குறியீட்டில், அவ் வெக்டர்,

$\vec{A}$ என்றோ

$\overline{A}$ என்றோ

A என்றோ

$\vec{OP}$ என்றோ

$\overline{OP}$ என்றோ

OP என்றோ

குறியீடு செய்யப்படும்; படிப்பது வெக்டர் A, வெக்டர் *OP* என்று படிக்கலாம். நாம் $\overline{OP}$ அல்லது $\bar{A}$ என்ற முறையைப் பயன்

படுத்துவோம். அவ் வெக்டரின் வெறும் அளவினை $|\overline{OP}|$ எனக் குறியிடு செய்து காட்டலாம். இதை மட்டும் வெக்டர் OP என்று படிக்கவும்.

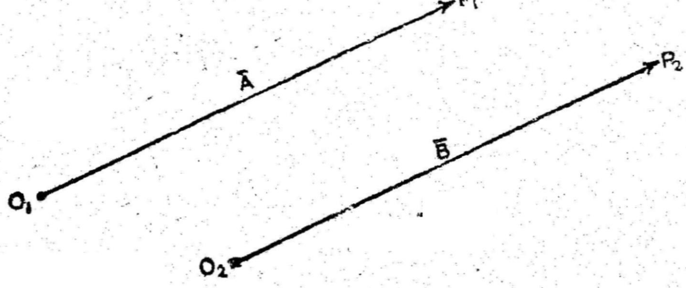
2-2. **வெக்டரியல்: அளவு** மட்டுமன்றித் **திசையும்** வெக்டரின் தனிச் சிறப்பான பண்பாதலின், வெக்டரியலில் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் முதலிய செயல்களையும் முன்னுக்குப்பின் முரணின்றிப் பொருத்தமாக வரையறைப் படுத்தவேண்டும். அளவையியலில் (Scalar Algebra) உள்ள வரையறைகளை, தேவைக்குத் தக்கவாறு வரையறுத்துக்கொண்டு, வெக்டரியலிலும் அச் செயல்களை விரிவுபடுத்தி வெக்டரியல் வகுக்கப் படுகிறது.

2-2.1. வெக்டர்களைப் பற்றிய சில அடிப்படையான வரையறைகள்

(i) $\bar{A}$-யும் $\bar{B}$-யும் ஒரே அளவு பெற்றனவாய், ஒரே திசையில் உள்ளனவாய் இருப்பின், அவை சம வெக்டர்களெனப் படும். அவற்றின் ஆரம்ப முனைகள் வெவ்வேறுயிருக்கலாம். படம் 2-2.1.1-ல்

$$\bar{A} = \bar{B}; \ \overline{O_1P_1} = \overline{O_2P_2}$$

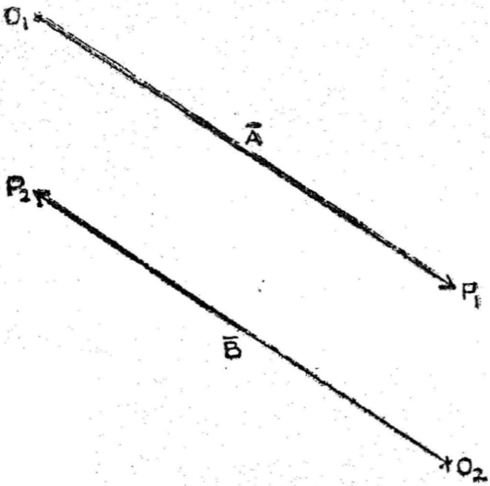
நீளம் O_1P_1 = நீளம் O_2P_2; இரண்டும் இணைகோடுகள்.



2-2.1.1.

(ii) $\bar{A}$-யும், $\bar{B}$-யும் ஒரே அளவு பெற்றனவாய், ஆனால் நேரெதிர்த் திசைகளிலிருப்பின், $\bar{B} = -\bar{A}$ என்றோ, $\bar{A} = -\bar{B}$ என்றோ கூறலாம்,

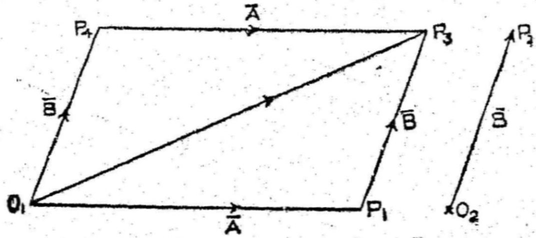
படம் 2–2.1.2–ல், $\bar{A} = -\bar{B}$; $\bar{B} = -\bar{A}$.



படம் 2-2.1.2.

(iii) **வெக்டர் கூட்டல்** (Addition of Vectors): படம் 2-2.1.3-ல் $\overline{O_1P_1} = \bar{A}$; $\overline{O_2P_2} = \bar{B}$ எனக் கொள்க.

P_1 வழியாக $P_1P_3 \parallel O_2P_2$ வரைந்து, $P_1P_3 = O_2P_2$ என்ற வகையில், P_3 ஐ இடங் குறிக்க.



படம் 2-2.1.3

2-2.1 (i)–ல் கண்ட வரையறைப்படி

$$\overline{P_1P_3} = \overline{O_2P_2}$$

$$\therefore \quad \overline{O_1P_1} + \overline{O_2P_2} = \overline{O_1P_1} + \overline{P_1P_3}$$

வெக்டர் கூட்டல் வரையறை

$$\overline{O_1P_1} + \overline{P_1P_3} = \overline{O_1P_3}$$

இந்த வரையறையின் அடிப்படையில் இரு வெக்டர்களின் கூட்டல் பெறப்படுகிறது. (இது தெரிப்பன்று; கூட்டல் வரையறை.)

$\therefore\ \overline{O_1P_3} = \bar{A} + \bar{B}$ என்பது வரையறையாகும். இவ் விதி நாம் அறிந்த **இணைகரக்கூட்டு விதி** (Parallelogram Law) என்பதேயாம்.

(iv) வெக்டர் கழித்தல்

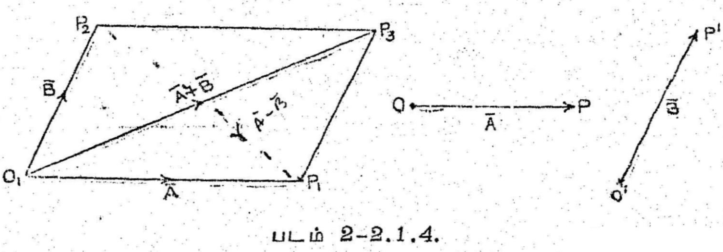
$\bar{A} - \bar{B}$ என்பது, கூட்டலின் நேரெதிர்ச் செயலால் பெறப்படும். எந்த $\bar{C}$ யோடு $\bar{B}$-யைக் கூட்டினால் $\bar{A}$ கிடைக்குமோ, அந்த $\bar{C}$ தான் $\bar{A}-\bar{B}$ எனப்படும்.

அல்லது $\bar{A}-\bar{B} = \bar{A}+(-\bar{B})$ எனவும் கூறலாம்.

இந்தப்படியாக $\bar{A}-\bar{B}$-ன் உருவமைப்பைக் காண்போம். படம் 2—2.1.4 காண்க.

$$\overline{OP} = \bar{A}, \quad \overline{O_1P_1} = \bar{B}.$$

இணைகோடுகள் கொண்டு $\overline{O_1P_1} = \bar{A}$; $\overline{O_1P_2} = \bar{B}$ என வரைந்து கொள்க. இணைகரம் $O_1\ P_1\ P_3\ P_2$ வரைந்து கொள்க.



படம் 2-2.1.4.

வரைவு முறைப்படி $\overline{O_1P_1} = \bar{A}$; $\overline{O_1P_2} = \bar{B}$

2—2.1.2-ல் கண்ட வரையறைப்படி

$\overline{P_3P_2} = -\bar{A}$; $\overline{P_3P_1} = -\bar{B}$

$\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}$

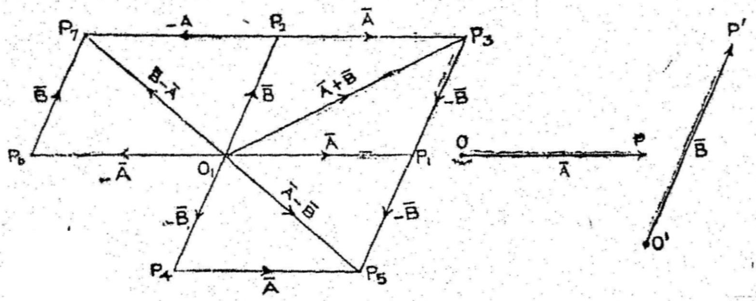
$$= \bar{A} + (-\bar{B})$$
$$= \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_1}$$
$$= \overline{P_2 P_1}$$ (படத்தில் காட்டப்படவில்லை)

$$\bar{B} - \bar{A} = \bar{B} + (-\bar{A})$$
$$= \overline{O_1 P_2} + \overline{P_3 P_2}$$
$$= \overline{P_1 P_3} + \overline{P_3 P_2}$$
$$= \overline{P_1 P_2}$$
$$= -\overline{P_2 P_1}$$
$$= -\bar{C}$$

இவ்வாறாக, வெக்டர் கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்த முறையைச் சிறிது மாற்றி, ஆனால் சற்று விரிவாக, வெக்டர் கழித்தலை வரையறுக்கலாம். அம்முறை பின்னர்க் கூறப்பட்டிருக்கிறது.

மாற்று முறையில் $\bar{A} - \bar{B}$-ன் உருவமைப்பைக் காண்போம்.

படம் 2-2.1.5 காண்க. $\overline{OP} = \bar{A}$; $\overline{O'P'} = \bar{B}$. இணை கோடுகள் கொண்டு $\overline{O_1 P_1} = \bar{A}$, $\overline{O_1 P_2} = \bar{B}$ என வரைந்து கொள்க. $P_1 O_1$ஐ நீட்டி, $O_1 P_6 = P_1 O_1$ என P_6ஐ இடங் குறிக்க. $P_2 O_1$ஐ நீட்டி, $O_1 P_4 = P_2 O_1$ என P_4ஐ இடங் குறிக்க.



படம் 2—2.1.5

இணைகரங்கள் $O_1 P_1 P_3 P_2$, $O_1 P_4 P_5 P_1$, $O_1 P_2 P_7 P_6$ வரைந்து கொள்க. வரைவு முறைப்படி,

$$\overline{O_1 P_6} = -\bar{A}$$
$$\overline{O_1 P_4} = -\bar{B}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{C} = \bar{A}-\bar{B} &= \bar{A}+(-\bar{B}) \\
&= \overline{O_1 P_1}+\overline{O_1 P_4} \\
&= \overline{O_1 P_1}+\overline{P_1 P_5} \\
&= \overline{O_1 P_5} \\
&= \overline{P_2 P_1} \text{ (படத்தில் காட்டப்படவில்லை)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{B}-\bar{A} &= \bar{B}+(-\bar{A}) \\
&= \overline{O_1 P_2}+\overline{O_1 P_6} \\
&= \overline{O_1 P_2}+\overline{P_2 P_7} \\
&= \overline{O_1 P_7} \\
&= -\overline{O_1 P_8} \\
&= -\bar{C}
\end{aligned}
$$

முதற் கூறிய முறையே சுருக்கமாக இருப்பதாலும், வெக்டர்களை எளிதாகக் கூட்டவும் பல முறைகளும் தெரிந்து கொள்ளுதல் நலமாதலாலும், முதற் கூறிய முறையையே வைத்துக் கொள்ளலாம்.

(v) $\bar{A} = \bar{B}$ ஆனால்,

$$
\begin{aligned}
\bar{A} - \bar{B} &= \bar{A}+(-\bar{B}) \\
&= \bar{A}+(-\bar{A}) \\
&= \bar{0} \text{ (பூச்சிய வெக்டர்)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{அதாவது } \bar{A}-\bar{A} &= \bar{A}+(-\bar{A}) \\
&= \bar{0} \text{ (பூச்சிய வெக்டர்)}
\end{aligned}
$$

(vi) ஒரு வெக்டர் $\bar{A}$ஐ ஓர் அளவை mஆல் பெருக்கினால் அதாவது $m(\bar{A}) = m\bar{A}$.

(vii) $\bar{A}$ஐ $\bar{B}$ஆல் பெருக்குவது என்பது வெக்டரியலில் இரு வகைப்படும்.

(a) $\bar{A} \cdot \bar{B}$ (புள்ளிப் பெருக்கல்—dot product)

(b) $\bar{A} \times \bar{B}$ (குறுக்குப் பெருக்கல்—cross product)

இவை பின்னர் வரையறுக்கப்படும்.

(viii) வெக்டரியல் விதிகள்

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ என்பவை வெக்டர்களெனவும், m, n என்பது வெறும் அளவைகள் எனவும் கொள்ளப்படும்.

(a) $\bar{A}+\bar{B}=\bar{B}+\bar{A}$ (மாற்று விதி—Commutative law)

(b) $\bar{A}+(\bar{B}+\bar{C})=(\bar{A}+\bar{B})+\bar{C}$ (தொகுப்பு விதி—Associative law)

(c) $m\bar{A} = \bar{A}m$ (மாற்று விதி)

(d) $m(n\bar{A}) = n(m\bar{A})$

$= mn\bar{A}$ (தொகுப்பு விதி)

(e) $(m+n)\bar{A}=m\bar{A}+n\bar{A}$ (பங்கீட்டு விதி—Distributive law)

(f) $m(\bar{A}+\bar{B})=m\bar{A}+m\bar{B}$ (பங்கீட்டு விதி)

இதுவரை நாம் கண்ட வெக்டரியல் விதிகள் யாவும், சாதாரண இயற்கணிதத்தில் கண்ட விதிகள் யாவும் (வெக்டரை வெக்டரால் பெருக்கல் தவிர) வெக்டர் கூட்டல், வெக்டரை அளவையால் பெருக்கல் என்பவற்றிற்குப் பொருந்துவன காண்க. கழித்தல் என்பது எதிர்க் கூட்டல்; அதாவது $\bar{A}-\bar{B}=\bar{A}+(-\bar{B})$ என வரையறுத்துள்ளபடியால், இவ் விதிகள் வெக்டர் கழித்தலுக்கும் பொருந்தும்.

எனவே, $\bar{A}+\bar{B}=\bar{C}$ ஆனல்

$\bar{B}=\bar{C}-\bar{A}$

$\bar{A}=\bar{C}-\bar{B}$ எனவும் எழுதலாம்.

(ix) ஓரலகு வெக்டர் (Unit Vector)

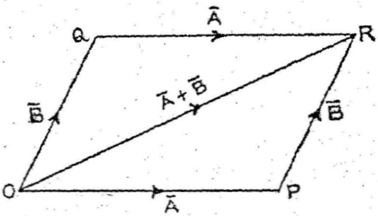
குறிப்பிட்ட திசையில் ஓர் அலகு அளவுள்ள வெக்டருக்கு ஓரலகு வெக்டர் எனப் பெயர்.

$\bar{A}$ என்பது ஒரு வெக்டரானல், $\dfrac{\bar{A}}{A}$= ஓரலகு வெக்டர்; இங்குக் கீழெண் A, அவ்வெக்டரின் அளவு அல்லது நீளம். ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் $\bar{a}$ ஓர் ஓரலகு வெக்டரானல், அத் திசையில் $\bar{A}=A\bar{a}$ என எழுதலாம். (A—வெறும் அளவு அல்லது நீளம்.) $\bar{a}$ ஓர் ஓரலகு வெக்டரானல், அதனைக் குறிக்கும் முறை $\hat{a}$.

(x) முன்னர் (viii)-ல் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் விதிகளில் சிலவற்றை நாம் உருவமைப்புப் படம் வரைந்து புரிந்து கொள்ளலாம்.

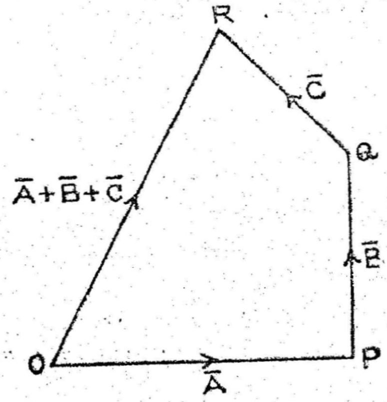
(i) $\bar{A}+\bar{B}=\bar{B}+\bar{A}$ (படம் 2-2.1.6 காண்க.)

$$\bar{A}+\bar{B}=\overline{OP}+\overline{PR}$$
$$=\overline{OR}$$
$$\bar{B}+\bar{A}=\overline{OQ}+\overline{QR}$$
$$=\overline{OR}$$
$$\therefore\ \bar{A}+\bar{B}=\bar{B}+\bar{A}$$



படம் 2-2.1.6.

(ii) $\bar{A}+(\bar{B}+\bar{C}) = (\bar{A}+\bar{B})+\bar{C}$ (படம் 2-2.1.7 காண்க.)



படம் 2-2.1.7.

$$\bar{A}+(\bar{B}+\bar{C}) = \overline{OP} + (\overline{PQ}+\overline{QR})$$
$$= \overline{OP}+\overline{PR}$$
$$= \overline{OR}$$

$$(\bar{A}+\bar{B})+\bar{C} = (\overline{OP}+\overline{PQ})+\overline{QR}$$
$$= \overline{OQ}+\overline{QR}$$
$$= \overline{OR}$$

$$\therefore\ \bar{A}+(\bar{B}+\bar{C}) = (\bar{A}+\bar{B})+\bar{C}$$

2-4. இப்போது (1) ஒரு துகளின் மேல் செயற்படும் விசை; (2) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் செயற்படும் விசை இவ்விரண்டினையும் வெக்டர் முறையில் குறிக்கும் முறைகளைப் பார்ப்போம். பொதுவாக, விசைகள் ஒரே தளத்தில் இருக்கவேண்டுமென்ற தேவையில்லை. ஆனால், நாம் இந்த நூலைப் பொறுத்தமட்டில் ஒரே தளத்தில் செயற்படுகின்ற விசைகள் பற்றியே படிக்க இருக்கிறோம். இந்த அடிப்படையிலேதான் இந்நூல் எழுதப்பட்டிருக்கிறது.

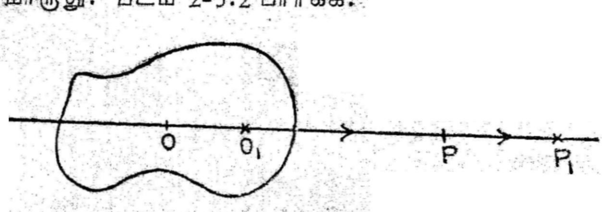
2-5.1. **(1) துகள்மேல் செயற்படும் விசை :** O என்பது அத்துகளைக் குறிக்கும் புள்ளியாக இருக்கட்டும். ஆரம்ப முனையை O எனக் கொண்டு, அவ்விசை செயற்படும் திசையில் ஒரு நேர்கோடு வரைந்து, ஒரு வசதியான அளவுச் சட்டப்படி OP என்ற அளவு கொண்டு அவ்விசையின் அளவைக் குறித்தால், $\overline{OP}$ என்பது அவ்விசையின் எல்லா விவரங்களையும் உருவமைத்துக் காட்டும்.

2-5.2. **(2) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் செயற்படும் விசை :**

பின்னர் பகுதி III–ல், நாம்,

'ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் குறிப்பிட்ட விசையை, அவ்விசை யியங்கும் நேர்கோட்டில் (அப்பொருளின்) மற்றும் ஏதாவதொரு புள்ளியில் திசைமாறாது செயற்படச் செய்தால், முற்கூறப்பட்ட விசையினால் ஏற்படும் விளைவு மாறாமல், பிற்கூறப்பட்ட விசையினால் விளையும்' என்ற விதியைக் காண இருக்கிறோம். (விசை செலுத்தப்படும் **தன்மை விதி.)**

எனவே, O என்ற புள்ளியில் $\overline{OP}$ எனக் குறிப்பிடக்கூடிய ஒரு விசை செயற்படுமானால், அதற்குப் பதிலாக OP -ல் O_1 என்ற புள்ளியில் $\overline{O_1P_1} = \overline{OP}$ என்ற விசை செயற்பட்டால், விளைவு மாறாது. படம் 2-5.2 பார்க்க.



படம் 2-5.2

எனவே, நமக்குக் கட்டிறுக்கப் பொருளைப் பொறுத்தவரை, விசையியங்கும் நேர்கோடு மாறாது; ஆனால், அவ்விசை குறிப்

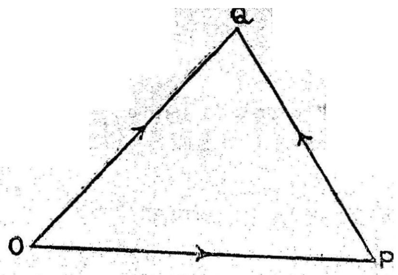
பிட்ட அளவுடன் குறிப்பிட்ட திசையில் OP-ல் எங்கு வேண்டு மானாலும் செயற்படலாம். எனவே, OP என்ற கோட்டில் அவ் விசை செயற்படுவதால், அவ்விசையைக் குறிக்கும் வெக்டர் ஒரு திட்டமான கோட்டின் மேல் செயற்படுகிறது. எனவே, அவ்வெக்டர் **கோடு குறித்த வெக்டர்** (Localised Vector) எனப் படும். ஒரு துகள் மேல் செயற்படும் வெக்டரையும் இவ்வாறு கோடு குறித்த வெக்டர் எனக் கூறலாம்.

இதுவரை (1) பொதுவான வெக்டர்—அதாவது தன்னிச் சையான வெக்டர் (2) கோடு குறிக்கப்பட்ட வெக்டர் என இரு வகைப்பட்ட வெக்டர்களைப் பற்றிப் பார்த்தோம். அடுத்து இடங்குறி வெக்டர் (Position Vector) என்னவெனப் பார்ப் போம்.

2.6. **இடங்குறி வெக்டர்கள்** (Position Vectors)

O என ஒரு ஆதிப் புள்ளி குறிப்பிடப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்வோம். P என்ற மற்றோர் புள்ளியை $\overline{OP}$ என்ற வெக்டர் தனிச்சிறப்பாக இடங்குறிக்கிறது. அப்போது O ஐ ஒட்டி, $\overline{OP}$ என்பது P என்ற புள்ளியை இடங்குறிக்கும் வெக்டர் எனப் படும்.

$\overline{OP} = \bar{A}, \overline{OQ} = \bar{B}$ எனக் கொண்டால், கூட்டல் வரை யறைப்படி,



படம் 2-6.1

$$\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = -\bar{A}+\bar{B}$$

$$= \bar{B}-\bar{A} \text{ (படம் 2-6.1)}$$

அவ்வாறே, கூட்டல் வரையறைப்படி,

$$\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP} \text{ (படத்தில் காட்டப்படவில்லை)}$$
$$= -\overline{B}+\overline{A}$$
$$= \overline{A}-\overline{B} \text{ (படம் 2-6.1)}$$

இம் மூன்று வகைப்பட்ட வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட வேறுபாடுகளை நாம் நினைவில் வைக்க வேண்டும். இவற்றில் **கோடு குறித்த வெக்டர்** ஒரு குறிப்பிட்ட துகளின் மேல் அல்லது ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு குறித்த புள்ளியில் செயற்படும் விசையின் எல்லா விவரங்களையும் உருவமைத்துக் காட்டுகிறது. இக் கருத்து, நிலையியலில் பெரிதும் பயன்படும். ஓர் **இடங்குறி வெக்டர்** ஓர் ஆதிப்புள்ளியையொட்டி, ஏதாவதொரு புள்ளியை இடங்குறிக்கிறது.

2-7. இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் மதிப்பு
(Dot Produ t of two Vectors)

$\overline{A}$, $\overline{B}$ என்பவை இரு வெக்டர்கள்; அவற்றின் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனக் கொள்க. மரபுப்படி $0 \leq \theta \leq \pi$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலுள்ள கோணம்தான் கணக்கில் எடுக்கப்படும்.

$|\overline{A}|\ |\overline{B}| \cos\theta$ என்ற அளவை (எண் மதிப்பு) $\overline{A},\overline{B}$ என்ற வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் மதிப்பு எனப்படும். இதனைக் குறியீடு செய்யும் முறை: $\overline{A}\,.\,\overline{B}$ (படிப்பது வெக்டர் $\overline{A}$ புள்ளி வெக்டர் $\overline{B}$).

$\overline{A}.\overline{B} = |\overline{A}|\ |\overline{B}| \cos\theta$ என்பது வரையறை. எனவே, இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் மதிப்பு ஓர் அளவை, வெக்டர் அல்ல.

குறிப்பு: (*i*) $\theta = 0$ ஆனால், அதாவது $\overline{A},\overline{B}$ இரண்டும் ஒரே திசையிலிருப்பின் (இணை கோடுகளிலிருப்பின்) $\overline{A}.\overline{B} = |\overline{A}|\ |\overline{B}|$

(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆனால், அதாவது $\overline{A}$-ம் $\overline{B}$ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணச் சாய்விலிருப்பின் $\overline{A}.\overline{B} = 0$.

2-8. இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கல் மதிப்பு
(Cross product or Vector product)

$\overline{A},\overline{B}$ இரு வெக்டர்கள்; அவற்றின் திசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனக் கொள்க ($0 \leq \theta \leq \pi$ மரபு). $\overline{A} \times \overline{B}$ என்று

குறுக்குப் பெருக்கல் குறிப்பிடப்படும்; வெக்டர் A குறுக்குப் பெருக்கல் வெக்டர் B என்று படிக்க வேண்டும்.

வரையறை

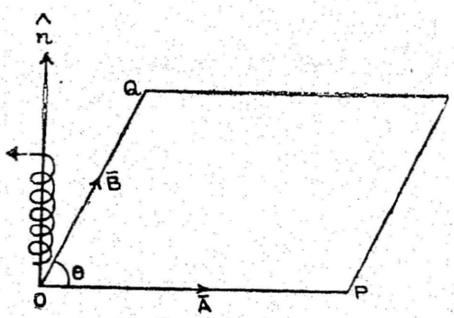
(*i*) $\hat{n}$ என்பது $\bar{A}, \bar{B}$ இரண்டிற்கும் செங்குத்தாயுள்ள ஓரலகு வெக்டர் எனக் கொள்க.

(*ii*) $\bar{A}$-லிருந்து $\bar{B}$-க்கு வலப்புறமாகச் சுழற்றும்போது வலம்புரி (right handed screw) முன்னேறும் திசையில் $\hat{n}$ அமைந்துள்ளது.

இந்த இரண்டு கட்டுப்பாடுகளில்,

$\bar{A} \times \bar{B} = |\bar{A}|\ |\bar{B}|\ \text{Sin}\,\theta\ \hat{n}$ என்பது வரையறை.

இப் பெருக்கல் மதிப்பை இரு வெக்டர்களின் **வெக்டர் பெருக்கு மதிப்பு** எனவும் கூறுவதுண்டு. எனவே, இரு வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கல் மதிப்பு (வெக்டர் பெருக்கு மதிப்பு) மற்றோர் வெக்டர். அது முதல் இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான ஒரு வெக்டர்; $\bar{A}, \bar{B}, \hat{n}$ என்பவை வலக்கைப்புற சுழற்சியில் அமையும். (படம் 2-8) காண்க.



படம் 2-8.

குறிப்பு (1): B வெக்டரிலிருந்து $\bar{A}$ வெக்டருக்கு வலக்கைப் புறமாக சுழற்றினால், வலம்புரி $\hat{n}$-க்கு எதிர்த்திசையில் முன்னேறும். ஆதலால், $\bar{B} \times \bar{A}$ என்ற பெருக்கலில் ஓரலகு வெக்டர் $-\hat{n}$ ஆகும்.

ஆதலால் $\overline{B} \times \overline{A} = |\overline{B}|\ |\overline{A}| \sin\theta\ (-\hat{n})$

$$= -|\overline{A}|\ |\overline{B}| \sin\theta\ \hat{n}$$
$$= -\overline{A} \times \overline{B}$$

$\therefore\ \overline{A} \times \overline{B} = -\overline{B} \times \overline{A}$

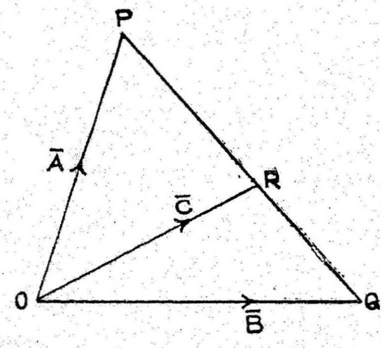
குறிப்பு (2): இயற் கணிதத்தில் பெருக்கல் $a \times b$ என்பதற்கும், வெக்டரியலில் பெருக்கல் என்பதற்கும் வரையறைகள் வேறுபடுவதைக் காண்க. இயற் கணிதத்தில் $ab = ba = a.b = a \times b$ என எழுதுகிறோம். இங்கு $\overline{A}\ \overline{B}$ என்று எழுதுவதில்லை; இதற்குப் பொருளில்லை.

குறிப்பு (3): ஆனால் $\overline{A}.\overline{B} = |\overline{A}|\ |\overline{B}| \cos\theta$
= ஓர் அளவை இராசி (Scalar quantity)
$\overline{A} \times \overline{B}$ = ஒரு வெக்டர் $\bar{c}$

இந்த $\bar{c}$ யாதென 2-8-ல் வரையறுக்கப் பட்டிருக்கிறது. ($\bar{c} = |\overline{A}|\ |\overline{B}| \sin\theta\ \hat{n}$).

2-9. ஓர் ஆதிப் புள்ளி Oஐ ஒட்டி P, Q ஒன்ற புள்ளிகளின் இடங் குறிக்கும் வெக்டர்கள் $\overline{A}$, $\overline{B}$ நேர்கோடு PQ ஐ R என்ற புள்ளி $PR : RQ = m : n$ என்ற விகிதத்தில பிரிக்குமானல், R-ன் இடங்குறி வெக்டர் என்ன ?

(படம் 2-9) காண்க. R-ன் இடங்குறி வெக்டர் $\bar{c}$ எனக் கொள்க.



படம். 2-9.

$PR : RQ = m : n$
$\therefore n . PR = m . RQ$

$n\,\overline{PR} = m\,\overline{RQ}$ (ஒரே திசை)

ஆனல் $\overline{PR} = \overline{C} - \overline{A}$

$\overline{RQ} = \overline{B} - \overline{C}$

$\therefore\ n(\overline{C} - \overline{A}) = m(\overline{B} - \overline{C})$

$$\overline{C} = \frac{n\,\overline{A} + m\,\overline{B}}{m+n} \quad (m + n \neq 0)$$

2–9.1. **திணிவு மையம்** (புவியீர்ப்பு மையம்) (Centroid)

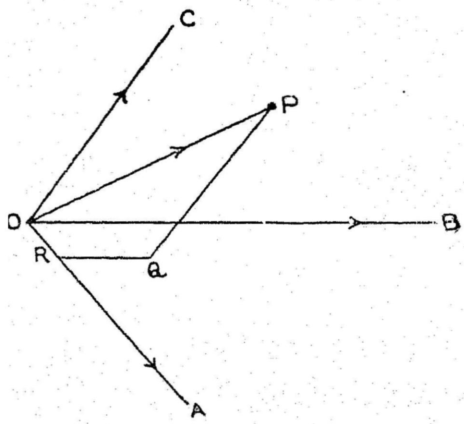
O ஒன்ற ஓர் ஆதிப் புள்ளியை யொட்டி n புள்ளிகளின் ($A, B, C, D,$ …… இடங்குறி வெக்டர்கள் $a, b, c,$ …… ஆனல், $\overline{OG} = \frac{1}{n}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots\ldots)$ என்ற வெக்டர், அப் புள்ளிகளின் திணிவு மையத்தை இடங் குறிக்கும் வெக்டர் என்பது **வரையறை.**

மற்றும், இவ்வரையறையை மேலும் பொதுப்படுத்தினல் அந்த n புள்ளிகள் $A, B, C,$ ……உடன் முறையே $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ என்ற n எண்களைத் தொடர்பு படுத்தினல், அவ்வாறு தொடர்பு படுத்தப்பட்ட புள்ளிகளின் திணிவுமையத்தை இடங்குறிக்கும் வெக்டர் $\overline{OG} = \dfrac{m_1\,\overline{a} + m_2\,\overline{b} + m_3\,\overline{c} + \ldots\ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots}$ என்பது **பொது வரையறை.**

2-9.2. **வெக்டர் பகுப்பு:** மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களுக்கு இணைத்தளமாக ஒரு தளம் காண முடியுமானல், அவ் வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தமைந்தவை யெனக் கூறலாம். (வரையறை 2-2.1 இறுதியில் காண்க.)

ஒரு தளத்தமையாத வெக்டர்கள் $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ எடுத்துக் கொள்க (படம் 2–9.2). அவற்றின் திசைகளில் $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ என்பவை ஓரலகு வெக்டர்களெனக் கொள்க.

ஆதிப் புள்ளி O-க்கு P ஐ இடங் குறிக்கும் வெக்டர் $\bar{r}$ எனக் கொள்க. அதாவது $\overline{OP} = \bar{r}$ (கன வடிவ கணிதத்தில் சாய்



படம் 2-9.2.

வச்சுகள் OA, OB, OC என்பவற்றையொட்டி P-ன் ஆயத் தொலைகள் x, y, z எனக் கொள்க).

$PQ \parallel OC$ எனவும், $QR \parallel OB$ எனவும் வரைக.

அப்போது $\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP}$

$$\therefore \bar{r} = x\hat{a} + y\hat{b} + z\hat{c}.$$

எனவே, OA, OB, OC என்ற திசைகளில் $\overline{OP}$ என்ற இடங் குறித்த வெக்டரின் பகுதிகள் முறையே x, y, z எனப்படும். சிறப்பாக OA, OB, OC என்ற அச்சுகள் சாய்வச்சுகளாயில்லாமல் ஒன்றுக்கொன்றுசெங்குத்தான அச்சுகளாயிருப்பின், அவ்வச்சுகளை முறையாக OX, OY, OZ எனப் பெயரிட்டு, (x, y, z) என்ற ஆயத் தொலையிலுள்ள புள்ளி P-ன் இடங் குறிக்கும் வெக்டரின் பகுதிகள் முறையே $\overline{xi}$, $\overline{yj}$, $\overline{zk}$ என மரபாகக் கொள்ளப்படுகிறது. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ என்பவை முறையே OX, OY, OZ என்ற திசைகளில் ஓரலகு வெக்டர்களாகும். எனவே, OX, OY, OZ என்ற கனவடிவ செங்குத் தச்சுக்களை

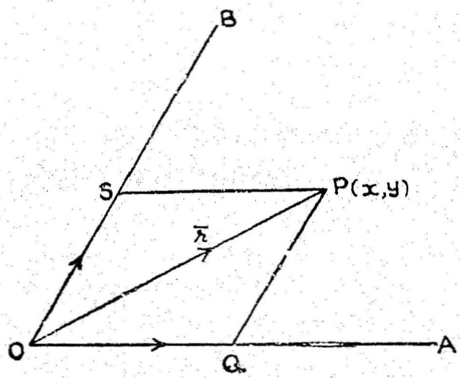
யொட்டி $P\ (x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் இடங்குறி வெக்டர் ஆனல்,

$$\text{மட்டு } |\bar{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ என்பவை OX, OY, OZ திசைகளில் $\overline{OP}$ -ன் பகுதிகளாகும்.

2-9.2.1. இதையே ஒருதளத்திற்கு மாற்றியமைப்போம். ஒரு தளஆயத் தொலை வடிவகணிதத்தில் (Plane coordinate geometry) O என்ற ஆதிப் புள்ளியை யொட்டி OA, OB என்ற இரு சாய்வச்சுகள் கொள்வோம். P என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) எனக் கொள்வோம். (படம் 2-9.2.1) காண்க. O என்ற ஆதிப் புள்ளியையொட்டி P-ன் இடங்குறி வெக்டர் $\bar{r}$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 2-9.2.1.

P வழியாக $PQ \parallel OB$, $PS \parallel OA$ வரைக. OA, OB என்ற திசைகளில் ஓரலகு வெக்டர்கள் a, b எனக் கொள்க.

$$\text{அப்போது } \overline{OP} = \overline{OQ}+\overline{QP}$$

$$= \overline{OQ}+\overline{OS}$$

$$= X\bar{a}+Y\bar{b}$$

எனவே, OA, OB என்ற திசைகளில் $\overline{OP}$ என்ற இடங் குறித்த வெக்டரின் அளவைப் பகுதிகள் முறையே x, y எனப்படும்.

சிறப்பாக OA, OB என்ற அச்சுகள் சாய்வச்சுகளாயில்லாமல், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகளாயிருப்பின், அவ்வச்சுகளை முறையாக OX, OY எனப் பெயரிட்டு, (x, y) என்ற ஆயத் தொலையிலுள்ள புள்ளி P-ன் இடங் குறிக்கும் வெக்டரின் பகுதிகள் முறையே $x\bar{i}$, $y\bar{j}$ என மரபாகக் கொண்டாடப்படுகின்றன; $\bar{i}$, $\bar{j}$ என்பவை முறையே OX, OY என்ற திசைகளில் ஓரலகு வெக்டர்களாகும். எனவே, OX, OY என்ற ஒருதள செங்குத்தச்சுகளையொட்டி P (x, y) என்ற புள்ளியின் இடங்குறி வெக்டர் $\bar{r}$ ஆனால்,

$$\text{மட்டு } |\bar{r}| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j} \text{ (பகுதிகள்)}$$

2·7-ல் விளக்கப்பட்ட புள்ளிப் பெருக்கல் விதிப்படி இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவிருப்பின், அவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கல் பூச்சியம்.

பின் வருவன விளங்கும்

(1) $\bar{i}\,.\,\bar{i} = 1 = \bar{j}\,.\,\bar{j} = \bar{k}.\bar{k}$

(2) $\bar{i}\,.\,\bar{j} = 0 = \bar{j}\,.\,\bar{k} = \bar{k}.\bar{i}$

(3) $\bar{r} = (\bar{r}\,.\,\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{r}\,.\,\bar{j})\,\bar{j} + (\bar{r}\,.\,\bar{k})\,\bar{k}$ என நிறுவலாம்.

தெரிப்பு : $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\,\bar{k}$ என நமக்குத் தெரியும். இதற்கு $\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}$ கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் தொகை காண,

$$\begin{aligned} \bar{r}\bar{j} &= (x\bar{i})\,.\bar{i}+(y\bar{j}).\bar{i}+(z\bar{k}).\bar{i} \\ &= x + y\,.\,0 + z\,.\,0 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\therefore\ x = \bar{r}\,.\,\bar{i}$$

அவ்வாறே $y = \bar{r}\,.\,\bar{j}$

$$z = \bar{r}\,.\,\bar{k}$$

$$\therefore \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$
$$= (\bar{r}\,\bar{i})\bar{i} + (\bar{r}\cdot\bar{j})\bar{j} + (\bar{r}\cdot\bar{k})\bar{k}$$

ஒரு தளத்தில் $r = (\bar{r}\cdot\bar{i})\bar{i} + (\bar{r}\cdot\bar{j})\bar{j}$

(4) $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

$\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ ஆனால்,

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(ஏனெனில் $\bar{i}\cdot\bar{i} = 1$, $\bar{i}\cdot\bar{j} = 0$ முதலியன உண்மையாகும்.)

ஒரு தளத்தில்

$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

$\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j}$ ஆனால்

$\bar{a}.\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

(5) $\bar{a}\times\bar{b} = 0$ ஆனால், $|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\theta = 0$

$\therefore \sin\theta = 0$; $\therefore \theta = 0$ அல்லது 180.

எனவே, இரு வெக்டர்கள் இணை கோடுகளில் இருப்பதற்கு அவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கல் பூச்சியமாக வேண்டும்.

(6) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore \bar{a}\times\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\theta\,\bar{n}$$
$$= -|\bar{b}|\,|\bar{a}|\sin(-\theta)\,\bar{n}$$
$$= -\bar{b}\times\bar{a}$$
$$\therefore \bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$$

எனவே, குறுக்குப் பெருக்கல் கொடுத்த வரிசையிலேயே வெக்டர்கள் இருக்க வேண்டும்; வரிசை மாறினால், குறி மாறும்.

(7) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருப்பதால்,

$$\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = 0$$
$$\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k} \quad ; \quad \bar{j}\times\bar{i} = -\bar{k}$$
$$\bar{j}\times\bar{k} = \bar{i} \quad ; \quad \bar{k}\times\bar{j} = -\bar{i}$$
$$\bar{k}\times\bar{i} = \bar{j} \quad ; \quad \bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j}$$

3. நிலையியலில் தோன்றும் விசைகள்

(Forces in the study of Statics)

3-1. நிலையியலில் அடிக்கடி நமது ஆய்வுக்கு வரும் சில வகையான விசைகள் இப் பகுதியில் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன (அவை இயக்க இயலிலும் தோன்றுவனவேயாம்).

அவையாவன:

(1) எதிர்வினை (Reaction)

(2) இழுவிசை (Tension)

(3) அமுக்கம் (Thrust)

(4) அழுத்தம் (Pressure)

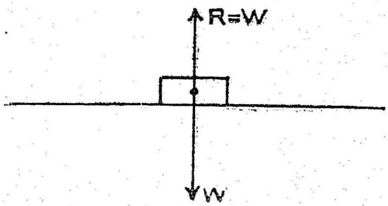
(5) உராய்வு (Friction)

(6) ஈர்ப்பு (Attraction)

இவை பற்றி சுருக்கமாக நாம் ஒன்றன் பின் ஒன்ருகப் பார்ப்போம். சில எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு இவை பின்னர் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

3-2. (1) **எதிர்வினை** (Reaction): ஒரு பொருள் மற்ருெரு பொருளைத் தொடும்பொழுது, தொடும்புள்ளியில் முதற் பொருள் இரண்டாம் பொருளை அழுத்துகிறது. இதை வினை (action) எனக்கூறுகிருேம். இரண்டாம் பொருள் முதற் பொருளை எதிர்த் திசையில் அழுத்துகிறது. இதை 'எதிர்வினை' எனக் கொண்டால், நியூட்டன் மூன்ரும்விதிப்படி 'வினையும்' 'எதிர்வினையும்' நேரெதிர்த் திசையில், சம அளவுடையனவாயிருக்கும்.

ஒரு பலகையின் மேல் W எடையுள்ள ஒரு பொருள் இருக்கிற தெனக்கொள்வோம். (படம் 3-2.) காண்க.

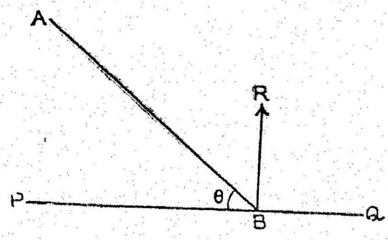


படம் 3-2.

அப் பொருள் பலகையை W என்ற எடையளவுள்ள விசை யோடு கீழே அழுத்துகிறது (இது அவ்வெடையின் வினை யெனப்படும்). இதன் காரணமாகப் பலகை நேரெதிர்த் திசை யில் W என்ற எடையளவுள்ள அளவோடு மேலே அழுத்துகிறது (இது அப்பலகையின் எதிர்வினை யெனப்படும்). இவ்விரு சம விசைகளும் நேரெதிர்த் திசையிலிருப்பதால், பலகை அசை வற்றிருக்கிறது; அந்த எடையும் அசைவற்றிருக்கிறது.

சில எதிர் வினைகள்

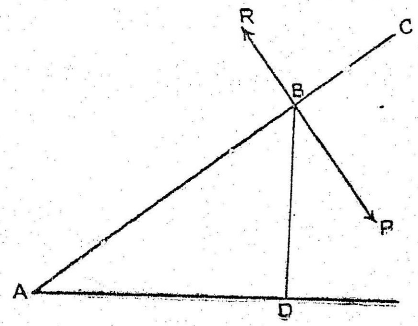
(i) AB என்ற ஒரு கோல் கிடைத்தளத்திற்கு θ அளவு சாய்வாக இருக்கிறது எனக் கொள்வோம். B என்ற



படம் 3.2.1

முனை கிடைத்தளத்தை அழுத்தி நிற்கிறது. அங்குத் தளத்தின் எதிர்வினை அழுத்துமிடத்தில் கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத் தாகச் செயற்படுகிறது (Normal to the surface at the point of contact). BR என்பது தளத்தின் எதிர் வினைத்திசை. (படம் 3-2.1) காண்க.

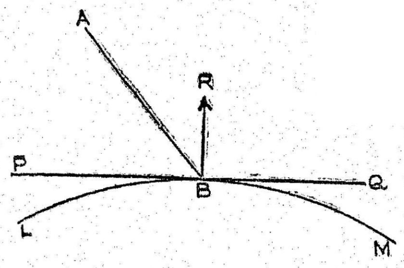
(*ii*) ஒரு கோல் ABC, DB என்ற சுவரின் மேல் வைக்கப் பட்டிருக்கிறது. கோல் சுவருக்கு அப்பாலும் நீண்டிருக்கிறது.



படம் 3-2.2.

கோல் சுவரை B-ல் அழுத்துகிறது. அழுத்தும் விசை $BP \perp AB$ என்ற திசையில் வினையாகச் செயற்படுகிறது. சுவரின் எதிர்வினை $BR \perp r\ AC$ என்ற திசையில் செயற்படுகிறது: (படம் 3-2.2) காண்க.

(*iii*) LM வழவழப்பானதொரு வளைவுப்பொருள் (படம் 3.2.3.) PQ என்ற கோல், அவ்வளைவுக்கு B என்ற புள்ளியில்

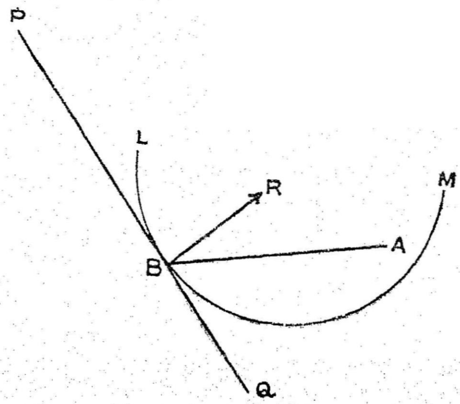


படம் 3-2.3.

தொடுவரையாயமைந்து, B என்ற புள்ளியில் தொட்டு அசைவற்றுஇருக்கிறது. PQ அவ்வளைவுப் பொருளை B என்ற இடத்தில் கீழே அழுத்துகிறது. வளைவு எதிர்வினையாக B என்ற இடத்தில் அக்கோலை மேலே அழுத்துகிறது. அங்கு எதிர்வினை

$BR \perp PQ$. AB என்ற ஒரு சாய்ந்த கோல் அதே வளைவை B என்ற புள்ளியில் அழுத்துகிறது. தொடுமிடமான B-ல் வளைவரைக்கு வரையப்படும் தொடு வரைக்கு (PQ—இங்குத் தொடு வரை) குத்துக்கோடான BR என்ற திசையில் எதிர்வினை செயற்படுகிறது.

(*iv*) (படம் 3–2.4.)-லும் மேற்கூறியபடி, AB என்ற கோல், வளைவரை LM ஐ B-ல் அழுத்துமானால், எதிர்வினை $BR \perp PQ$ (PQ என்பது வளைவரைக்கு B-ல் தொடுவரையாகும்) என்ற திசையில் செயற்படுகிறது.



படம் 3-2.4.

முதற் கூறிய வளைபொருள் ஒரு கோளப்பகுதியானால், RB என்பது கோளத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லு மென்பதைக் கண்டு கொள்க.

இரண்டாவது கூறிய வளைவரை ஒரு வட்டப் பகுதியானால், BR என்பது வட்டமையம் வழியாகச் செல்லு மென்பதைக் கண்டு கொள்க.

(2) இழுவிசை (Tension) : ஒரு பலமான மீள் இயல்பற்ற (Strong inelastic) கயிற்றின் ஒரு முனையில் ஒரு கிலோகிராம் எடையைக் கட்டி, மற்றொரு முனையைச் சுவரில் ஓர் ஆணியில் கட்டி, தன்னிச்சையாகத் தொங்க விட்டால், அக் கயிறும் எடை

யும் அசைவற்றுத் தொங்கும். அக்கயிற்றினை ஒரு கிலோ கிராம் எடையுள்ள விசை கீழேயிழுக்கிறது. இந்த இழுக்கும் விசை கீழாக இயங்குகிறது. பொருள் அசைவற்று இருப்பதால், அக் கயிறு எப்பொருளால் செய்யப்பட்டிருக்கிறதோ அப்பொருள் ஒரு கிலோகிராம் விசையை எதிரீடு செய்கிறபடியால், அசைவற்ற நிலை ஏற்படுகிறது. அப்படி அக்கயிறு எதிரீடு கொடுக்கும் விசையான ஒரு கிலோகிராம் **அந் நிலையில் அக் கயிற்றின் இழுவிசை** எனப்படும். இது கயிற்றுப் பொருளின் உள்விசை; உள்விசை வெளிவிசைக்குச் சமமாகி ஒரே நேர் கோட்டில் இவ்விரு சமமான விசைகளும் நேரெதிர்த் திசைகளில் இயங்கி, அமைதி நிலையை உருவாக்குகின்றன.

வெக்டரியல் படி,

$$\text{வெளிவிசை} \quad \bar{P} = 1 \text{ கிலோகிராம்} \downarrow$$

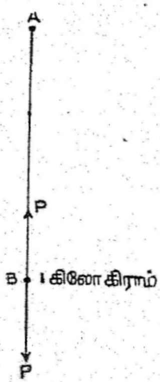
$$\text{உள்விசை} \quad -\bar{P} = 1 \text{ கிலோகிராம்} \uparrow$$

இவ்விரு விசைகளின் விளைபயன் இவ்விரு விசைகளின் வெக்டர் கூட்டற் பலன்,

$$\bar{P} + (-\bar{P}) = O \text{ (பூச்சிய வெக்டர்)}$$

பூச்சிய வெக்டர் அசைவற்ற நிலையைக் குறிக்கும்.

(படம் 3-2·5.) பார்க்க. 1 கிலோகிராமுக்குப் பதிலாக $\frac{1}{2}$கிலோகிராமோ, 2 கிலோகிராமோ தொங்க விட்டால், பூச்சிய வெக்டர் வரும் நிலையில், கயிறு முறையே, $\frac{1}{2}$ கி.கிராம் விசையையும், 2 கி.கிராம் விசையையும் எதிரீடு செய்து, அசைவற்ற நிலையை உருவாக்குகிறது. எனவே, கயிறு எதிரீடு செய்யும் உள் விசை வெளி விசைக்குச் சமமாகிக் கொண்டே வெளி விசைக்கு நேரெதிர்த் திசையில் இயங்கி, அசைவற்ற நிலையை உருவாக்குகிறது. ஆனால், நாம் வெளிவிசையை (கட்டித் தொங்க விட்டிருக்கும் எடையை) மிகுதிப் படுத்திக் கொண்டே போனால், ஒரு நிலையில் கயிறு அறுந்து போகும் நிலைக்கு வரும். அறுந்து போகும் நிலைக்கு வரும் சமயம் என்ன வெளிவிசை (கட்டித் தொங்கும் எடை) இருக்கிறதோ, அதுவே அக் கயிற்றின் **அறு விசை** (Breaking Tension) எனப்படும்.



படம் 3-2.5.

அவ்வறுவிசை கயிறு செய்யப் பட்டிருக்கும் பொருளையும், கயிற்றின் அமைப்பையும் பொருத்ததாகும். ஒரே பொருளால் செய்யப்பட்டு முறுக்கேறிய கயிற்றின் அறுவிசை, முறுக்கேருத கயிற்றின் அறு விசையை விட அதிகமிருக்கும். பஞ்சாலான கயிற்றுக்கும், பட்டுக் கயிற்றுக்கும், சணல் கயிற்றுக்கும் அறு விசைகள் வெவ்வேருகும்.

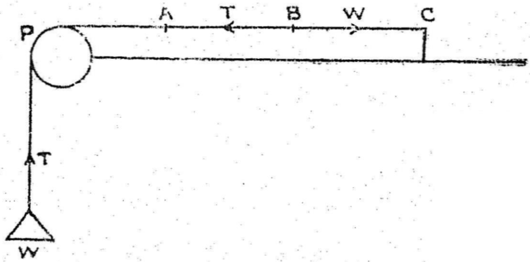
இப்போது மீள் இயல்புடைய (elastic) கயிறு ஒன்றின் ஒரு முனையில் ஒரு கிலோகிராம் எடையைக் கட்டித் தொங்க விட்டு முன் மாதிரியே மற்ருேர் முனையை ஒரு சுவரில் ஆணியில் கட்டித் தொங்க விடுவோம். கயிறு ஓரளவு நீண்டு, பின்னர் அசைவற்று இருக்கும். இப்போதும் இக்கயிறு எதிரீடு கொடுக்கும் விசை ஒரு கிலோ கிராமாகத்தான் இருக்கும். காரணம் முன் கூறிய மாதிரிதான். அவ்வெடையை நீக்கி விட்டால் கயிறு தனது இயற்கையான அளவிற்குச் சுருங்கிவிடும். எடையை அதிகமாக்க, அதிகமாக்கக் கயிறு நீண்டு கொண்டே போகும். எடையை அதிகமாக்கிக் கொண்டே செல்லும் போது, ஒரு நிலையில் கயிறு அறுந்துவிடும் சமயம் வரும். அப்போதுள்ள எடையே அக் கயிற்றின் அறுவிசையாகும். இங்கும் அறுவிசையானது, கயிறு செய்யப் பட்டிருக்கும் பொருள், அமைப்பு முதலியவற்றை யொட்டி மாறிக் கொண்டிருக்கும். மீள் இயல்புடைய கயிறுகளுக்கு ஒரு சிறப்பியல்பு உண்டு. அது யாதெனில், இயற்கை நீளம் l; கயிற்றின் முகப்பரப்பு a; வெளிவிசை = எதிரீடு செய்யப்படும் இழுவிசை T; நீட்சி (elongation) x எனில்,

$$\frac{\text{ஓரலகு பரப்பிற்குரிய இழுவிசை}}{\text{ஓரலகு இயல்பான நீளத்திற்குரிய நீட்சி}} = \frac{T/a}{x/l} = \frac{Tl}{ax}$$

என்ற ஒரு மாறிலி இயற்கையாக உண்டு. அம் மாறிலி $\frac{Tl}{ax} = \lambda$ எனப்படும். அது அக் கயிற்றின் (கயிற்றுப் பொருள், அமைப்பு முதலியவற்றின்) மீள் இயல் திறன் மாறிலி (Modulus of Elasticity) அல்லது 'யங்' மாறிலி (Young's Modulus) எனப்படும்.

மீள் இயல்புடைய பொருள்களின் நீட்சியையும், இழுவிசையையும் தொடர்பு படுத்தும் ஒரு முக்கிய விதியான 'ஹூக்' விதி (Hooke's law) நமது கவனத்திற்குரியது: "**இயற்கையான நீளத்திற்குமேல் ஏற்படும் நீட்சி, இழுவிசையுடன் நேர் விகிதத் தொடர்புடையது.**"

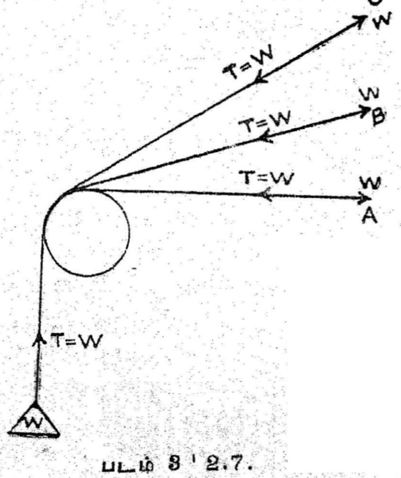
ஆனால், அறுவிசைக் கருகிலும் பின்னும் இவ்விதி உண்மையாகாது. மேற் கூறியவை, இழுத்தால் நீளக் கூடிய கம்பிகளுக்கும் பொருந்தும்; சுருள் வில் (springs) களுக்கும் பொருந்தும்.



படம் 3-2.6.

குறிப்பு (1): படம் 3–2.6-ல் உள்ளது போல் ஒரு வழவழப்பான கப்பி P–ன் மேல் செல்லும் ஓர் இலேசான கயிற்றினால் ஓர் எடை W அசைவற்று C-ல் இழுத்துப் பிடிக்கப்பட்டு நிற்குமானல், A, B, C என்ற எந்தப் புள்ளியிலும் W என்ற ஒரு விசை செயற்படும். அப்போது அக் கயிற்றின் உள் விசையான இழுவிசை T ஆனது, படத்தில் காட்டியபடி செயற்படும். $T = W$ ஆக இருக்கும்.

குறிப்பு (2): அது மட்டுமன்றி (படம் 3-2.7)-ல் இருப்பது போல, எந்தத் திசையிலும் கயிற்றை இழுத்து, Wஐ அசைவற்று



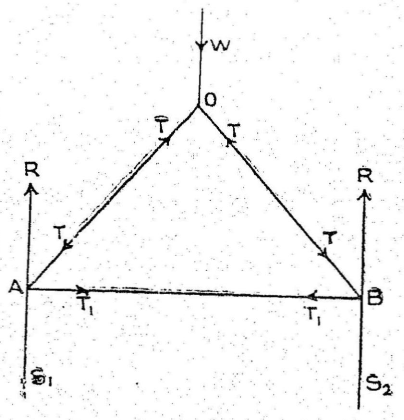
படம் 3·2.7.

இருக்கச் செய்தாலும் A, B, C என்ற இடங்களில் W என்ற ஒரு விசை செயற்பட வேண்டும். T செயற்படுவது படத்தில் காண்க.

இவ்விதமான இழு விசைகள், கம்பிகள், கழிகள், கோல்கள்......முதலியவற்றிலும், வெளிவிசை செயற்படும் போது, உள்விசையாகச் செயற்படும்.

(3) **அமுக்கம்** (Thrust): இழுப்பதற்குப் பதிலாக, ஒரு கோல், சுருள் வில் (spring) அல்லது மற்றெந்தப் பொருளும் அழுத்தப் பட்டால், அவ்வழுத்தத்தை எதிரீடு செய்து இயல்பு நிலையில் இருப்பதற்கு அல்லது மீள்வதற்கு உள்விசையாய்ச் செயற்படும் விசை அமுக்கவிசை எனப்படும்.

படம் 3-2.8-ல் ஒரு கூரை ஆதாரக்கட்டு (Roof Truss) காட்டப்பட்டிருக்கிறது. OAB அக்கூரை ஆதாரக்கட்டு.



படம் 3-2.8.

OA, OB, AB மூன்றும் தண்டவாளங்கள். AB என்ற குறுக்குத் தண்டவாளம் இரு சுவர்கள் S_1, S_2 மேல் வைக்கப்பட்டு, OAB கூரையைத் தாங்குகிறது. கூரை மேல் W என்ற பாரம் வைத்தால் OA, OB அமுக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, அவ்வமுக்கத்திற்கு எதிரீடு செய்து உள்விசையாக T, T என இரு உள்விசைகள் $\overline{AO}, \overline{BO}$ என்ற திசைகளில் செயற்படுவதால், O என்ற

புள்ளி அசைவற்று இருக்கிறது. படத்தில் A, B என்ற இடங்களில் செயற்படும் எதிரீட்டு விசைகளையும் நாம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

(4) **அழுத்தம்:** மூட்டுகளில் (joints) ஏற்படும் அழுத்தத்தை நாம் இங்குக் குறிப்பிடுகிறோம். முன் 3–2.3–ல் O, A, B என்ற மூட்டுகளில் உள்ள அழுத்தங்கள் எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

(5) **உராய்வு:** வழவழப்பற்ற (அதாவது சொர சொரப்பான அல்லது உராய்வுடைய) ஒரு தளப் பரப்பின் மேல் (வளை தளப் பரப்பும் உட்பட) ஒரு பொருள் இருக்குமானால், அப் பொருளை நகர்த்துவதற்கு ஒரு சிறு விசை தேவைப்படுகிறது. ஏனெனில், வழவழப்பற்ற அப்பரப்பு அப்பொருள் நகர்வதை ஒரு சிறிது தடுத்து நிறுத்துகிறது; அத் தடுப்பு விசையே உராய்வு விசை யெனப்படும். ஒரு மோட்டார் ஒரு தளப்பரப்பின் மேல் நிற்கிறது. அதைத் தள்ளுவதற்கு ஒரு சிறிது விசை தேவைப் படுகிறது; ஏனெனில், தரையின் வழவழப்பற்ற தன்மை காரணமாக அந்த மோட்டார் நகர்வதை உராய்வு விசை தடுக் கிறது. அந்த உராய்வு விசைக்கு அதிகமாக வெளிவிசை செயற்படும்போது, மோட்டார் நகர்கிறது.

எனவே, உராய்வு விசை இயற்கையிலேயே அமைந்துள்ள ஒரு விசையாகும். சொர சொரப்பாக ஒரு பரப்பு இருக்குமானால், உராய்வு விசை அதிகம்; அதை வெல்லச் சற்று அதிகமான வெளிவிசை தேவைப்படும். சொர சொரப்பு குறைவானால், உராய்வு விசை குறைவு; அதை வெல்ல ஒரு சிறு வெளி விசையே போதுமானது. கண்ணாடி மழமழப்பாக இருப்பினும், அதன் சொர சொரப்பு மிகவும் குறைவு என்று சொல்லலாமே தவிர, சொர சொரப்பு முற்றிலுமில்லை என்று இயற்கையில் அமைவதில்லை.

இவ் வுள்விசைபற்றி பின்னர் பகுதி 9–ல் விரிவாகப் பார்க்க இருக்கிறோம்.

(6) **ஈர்ப்பு:** ஓர் இரும்புத் துண்டை ஒரு காந்தக் கல்லின் அருகில் கொண்டு வந்தால், அக் கல் அவ் விரும்புத் துண்டைத் தன்பால் இழுக்கிறது. காந்தமேறிய இரும்புத்துண்டு அருகிலுள்ள மற்ற இரும்புப் பொருள்களைத் தன்பால் ஈர்க் கிறது. ஈர்க்கும் பொருளுக்கும், ஈர்க்கப்படும் பொருளுக்கும் இடையே எந்தவித ஊடகமும் (Medium) - காற்று தவிர-

இல்லாமல், இவ்வாறு ஈர்க்கும் விசையே ஈர்ப்பு விசை யெனப் படும். இம்மண்ணுலகம் தன் மையத்தை நோக்கி எல்லாப் பொருள்களையும் ஈர்க்கும் விசையான புவியீர்ப்பு விசை என்பது பற்றிமட்டும் இந்நூலில் நாம் பார்க்கவிருக்கிறோம் (Earth's gravitational pull). இதனை முதலில் கண்டு கூறியவர் நியூட்டன் என்ற ஆங்கில விஞ்ஞான மேதையென எல்லோரும் அறிவார்கள்.

இதற்கு எதிர்மாறாக ஒரு பொருள் தன் உள்ளிருக்கும் விசையால் தன்னருகில் வரும் பொருளை உந்தித் தள்ளும் ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கலாம். அது தள்ளுகை விசை (Repulsive force) எனப்படும். இதுபற்றிக் காந்த இயலில் (Magnetic Theory) காணலாம்.

மற்றும், நாம் நிலையியலில் காணவிருக்கும் சில புது கருத்து களைப் புரிந்து கொண்டு, பின்னர் முறையாக நிலையியல் பற்றிக் காண்போம்.

(1) **ஒரு பொருளின் அசைவற்ற நிலை** (State of equilibrium): ஒரு பொருளின் மேல் பல்வேறு விசைகள் செயற் படும்போது, அப் பொருள் இயங்கலாம்; அல்லது அவ்விசை களின் (கூட்டு) விளைவாக அப்பொருள் அசைவற்று இருக்க லாம். பல விசைகளின் (கூட்டு) விளைவாக ஒரு பொருள் அசை வற்றிருப்பின், அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையில் உள்ளது எனக் கூறலாம். சமநிலையில் உள்ளது என்றும் கூறுவது மரபாம்.

(2) **(கூட்டு) விளைவு விசை, சமமாக்கும் விசை** (Resultant force and Equilibrant):

(i) **(கூட்டு) விளைவு விசை:** ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருள் மேல் செயற்படும்போது, அவையெல்லா வற்றின் கூட்டு விளைவாக ஒரே ஒரு தனி விசை காண **முடியுமானால்,** அவ் விசையானது முதல் கூறப்பட்ட விசை களின் **(கூட்டு) விளைவு விசை** எனப்படும். (ஓரொரு கால் அவ் விசைகளின் கூட்டு விளைவாக ஒரே ஒரு தனி விசை காண முடியாமற் போகலாம்; எனவேதான், **முடியுமானால்** என்பது வலியுறுத்தப்படுகின்றது). முதற் கூறப்பட்ட விசைகள் செயற் படுவதால் அப்பொருளுக்கு என்ன நேருமோ, அதுவே அத்தனி விசையான (கூட்டு) விளைவு விசையால் அப்பொரு ளுக்கு நேரும். அப்படி ஒரு விசையிருப்பின், வெக்டரியலில் $\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \ldots$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$...என்பவை பல விசைகள்.

$\bar{R}$ **அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை**

(ii) **எதிரீட்டு விசை அல்லது எதிர்ச்சமனி** (Equilibrant):

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருள் மேல் செயற்படும்போது, அவற்றின் (கூட்டு) விளைவை எதிர்த்து, அப் பொருளை அமைதி நிலையில் நிறுத்தக்கூடிய ஒரே ஒரு தனி விசை காண முடியுமானுல், அத்தனி விசை, முதற் கூறப்பட்ட விசைகளின் எதிரீட்டு விசை அல்லது எதிர்ச்சமனி எனக் கூறப்படும். இங்கும் 'முடியுமானுல்' என்பது வலியுறுத்தப்படுவதை மனத்திற் கொள்க.

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ . . . என்பவை விசைகளாய், $\bar{R} = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots\ldots$ ஆனுல், எதிரீட்டு விசை அல்லது எதிர்ச்சமனி—$\bar{R}$ எனப் பெறப்படும். அதாவது

$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots\ldots\ldots) + \bar{S}=O$ என இருப்பின் $\bar{S}$ என்பது $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots$—ன் எதிர்ச்சமனி.

$$\bar{S} = -(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots\ldots\ldots) \text{ என்ருே,}$$

$$\bar{S} = -\bar{R} \text{ என்ருே}$$

$$-\bar{S} = \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\ldots\ldots\ldots \text{என்ருே,}$$

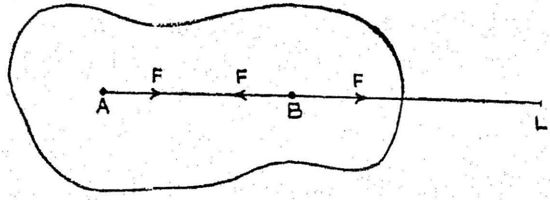
அமைவதைக் கண்டு கொள்க.

3.4. விசை செலுத்தப்படும் தன்மை விதி (Transmissibility of force)

(*i*) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட விசையை அவ்விசை யியங்கும் நேர் கோட்டில் (அப்பொருளின்) மற்றும் ஏதாவதொரு புள்ளியில் திசைமாருது செயற்படச் செய்தால், முதற் கூறப்பட்ட விசையினுல் ஏற்படும் விளைவுதான் பிற் கூறப்பட்ட விசையினுலும் விளையும்.

(*ii*) அமைதி நிலையிலிருக்கும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் இரு சம விசைகள் நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுமாயின்,அப்பொருளின் அமைதி நிலை குலேயாது,

அப்பொருள் அசைவற்றிருக்கும். இந்த அடிப்படையில் மேற்கூறிய விதியை விளக்கலாம். (படம் 3-4.) பார்க்க.



படம் 3-4

படம் 3-4-ல் A என்ற புள்ளியில் F என்ற ஒரு விசை செயற்படுகிறது; விசை செயற்படும் திசைக்கோடு AL எனக் கொள்க. இவ்விசை A-ல் செயற்படுவதால், அப்பொருளில் ஓர் இயக்கம் ஏற்படும் (ஏனெனில் விசையின் விளைவு, இயக்கம் அல்லது இயக்க இயல்பு). AL-ல் மற்றொரு புள்ளி B எனக் கொள்க. இப்போது அவ்விசையை A-விருந்து நீக்கி B-ல் அதே நேர்கோட்டில் அதே திசையில் அவ்விசையைச் செயற்படச் செய்தால், ஏற்படும் விளைவு A-ல் செயற்படும் போது ஏற்படும் விளைவேதானன்றி வேறொன்றுமல்ல என நிறுவவேண்டும். B என்ற புள்ளியில் நேரெதிர்த் திசைகளில் BA பக்கமாக F என்ற விசையையும் செயற்படச் செய்க. அவற்றின் விளைவு மட்டும் பூச்சியம். $(\overline{F}-\overline{F}=0)$. எனவே, அப்பொருளின் மேல்

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow B \text{ பக்கம் } F \text{ என்ற விசை} \\ B \rightarrow A \text{ பக்கம் } F \text{ என்ற விசை} \\ B \rightarrow L \text{ பக்கம் } F \text{ என்ற விசை} \end{array}\right\} \quad (M)$$

மூன்றும் செயற்படுகின்றன. எனவே, பின்னிரண்டு விசைகளும் ஒன்றையொன்று சரிப்படுத்திக் கொள்வதால், $A \rightarrow B$ பக்கம் F என்ற விசை செயற்படுவதால் ஏற்படும் விளைவும், மேற்கூறிய மூன்று விசைகளும் (M) செயற்படுவதால் ஏற்படும் விளைவும் ஒன்றேதான்.

இப்போது $A \rightarrow B$ பக்கம் F என்ற விசை,
$B \rightarrow A$ பக்கம் F என்ற விசை,

இரண்டும் ஒன்றையொன்று சரிப்படுத்திக் கொள்கின்றன. எனவே எஞ்சி நிற்பது,

$\therefore$ $B \to L$ பக்கம் F என்ற விசை.

எனவே $A \to L$ பக்கம் F என்ற விசையின் விளைவு

= விசைக்கூட்டு (M) என்பதின் விளைவு

= $B \to L$ பக்கம் F என்ற விசை விளைவு.

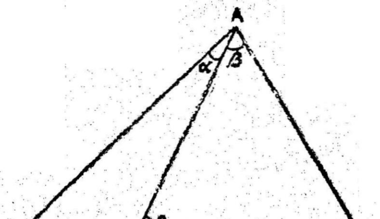
எனவே, ஒரு விசை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியில் செயற்படுமாயின், அவ்விசை செயற்படும் புள்ளியை விசைக் கோட்டின் மேல் திசை மாருது மாற்றம் செய்யலாம். முன் விளைவும், பின் விளைவும் ஒன்றே.

3-5. நிலையியலில் பல இடங்களில் பின்வரும் கோண கணிதத் தேற்றம் பயன்படுமாதலின், அத்தேற்றம் இங்கு நிறுவப்படுகிறது. அத்தேற்ற முடிவு நினைவில் இருப்பது நல்லது. ABC என்ற முக்கோணத்தில் D என்ற புள்ளி $BD:DC = m:n$ என்ற விகிதத்தில் BC ஐப் பிரிக்கிறது.

$\angle BAD = \alpha$; $\angle CAD = \beta$; $\angle ADC = \theta$ என்பவை அதன் விளைவுகள். இந்தக் கொள்கையில்,

(i) $(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta$

(ii) $(m+n) \cot \theta = n \cot \beta - m \cot C$



படம் 3.5

என்பவை உண்மை என்பது தேற்றம். (படம் 3-5) காண்க.

படம் 3-5-ன்படி,

$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC} = \frac{\triangle ABD \text{ (பரப்பு)}}{\triangle ADC \text{ (பரப்பு)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} AB.AD \sin \alpha}{\frac{1}{2} AD.AC \sin \beta}$$

$$= \frac{AB \sin \alpha}{AC \sin \beta}$$

$$= \frac{\sin C \sin \alpha}{\sin B \sin \beta} \quad \left(\because \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \right)$$

$$= \frac{\sin \alpha \sin (180 - \overline{\theta+\beta})}{\sin \beta \,.\, \sin (\theta - \alpha)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \sin (\theta+\beta)}{\sin \beta \sin (\theta - \alpha)}$$

$$\therefore \quad m \sin \beta \sin (\theta - \alpha) = n \sin \alpha \sin (\theta + \beta)$$

$$m (\sin \beta \sin \theta \cos \alpha - \sin \beta \cos \theta \sin \alpha)$$

$$= n (\sin \alpha \sin \theta \cos \beta + \sin \alpha \cos \theta \sin \beta) \ldots (A)$$

A-ன் இரு பக்கங்களையும் $\sin \alpha \sin \beta \sin \theta$ ஆல் வகுத்தால்,

$$m (\cot \alpha - \cot \theta) = n (\cot \beta + \cot \theta)$$

$$(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta \qquad \ldots (i)$$

எனப் பெறப்படும்.

அவ்வாறே $\frac{m}{n} = \frac{\sin C \sin \alpha}{\sin B \sin \beta}$

$$= \frac{\sin C \sin (\theta - B)}{\sin B \sin (180 - \overline{\theta + C})}$$

$$= \frac{\sin C \sin (\theta - B)}{\sin B \sin (\theta + C)}$$

$$\therefore m \sin B \sin (\theta + C) = n \sin C \sin (\theta - B)$$

$$m (\sin B \sin \theta \cos C + \sin B \cos \theta \sin C)$$

$$= n (\sin C \sin \theta \cos B - \sin C \cos \theta \sin B) \qquad \ldots (B)$$

(B)-ன் இரு பக்கங்களையும் $\sin B \sin C \sin \theta$ ஆல் வகுத்தால், $m(\cot C + \cot \theta) = n(\cot B - \cot \theta)$

$$\therefore (m+n) \cot \theta = n \cot B - m \cot C \qquad (ii)$$

எனப் பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் (i): $m=n$ ஆனால், அதாவது BC-ன் மையப்புள்ளி D ஆனால்,

$$2 \cot \theta = \cot \alpha - \cot \beta$$

$2 \cot \theta = \cot B - \cot C$ என்ற சிறப்புண்மைகள் பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் (ii): $\angle ADB = \theta$ ஆனால்,

$$-(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta \qquad \ldots(i)$$

$$-(m+n) \cot \theta = n \cot B - m \cot C \qquad \ldots(ii)$$

எனப் பெறப்படும்.

4. ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் பல விசைகள்

(Forces acting at a point)

இணைகர விதி—முக்கோண விதி—இலாமித் தேற்றம்—பல கோண விதி—விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு—விசைகளின் பிரித்த பகுதிகள்—அமைதி நிலை—

4-0. முன்னர் 3-3.(2)–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருள் மேல் அல்லது ஒரு துகள் மேல் செயற்படுமாயின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையாதென விளக்கினோம். வெக்டரியற்படி (கூட்டு) விளைவு விசை $\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \ldots$ என எழுதலாம். இவ் விசைகள் யாவும் ஒரே நேர்கோட்டில் செயற்படுமாயின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காண்ப தெளிது. ஏதாவது மரபு கொண்டு, ஒரு புறமுள்ள விசைகளுக்குக் கூட்டுக் குறி கொடுத்து, அவற்றின் சாதாரணக் கூட்டுத் தொகை R_1 ஐக் காண்க. எதிர்ப்புறமுள்ள விசைகளின் சாதாரணக் கூட்டுத் தொகை R_2 ஐயும் காண்க. R_1க்கும் R_2-க்கும் உள்ள வேறுபாடே, அந்நேர்கோட்டில் செயற்படும் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை; $R_1 > R_2$ ஆனால், அவ்விசை R_1 பக்கமாக $(R_1 - R_2)$ அளவாகச் செயற்படும். $R_2 > R_1$ ஆனால், அவ்விசை R_2 பக்கமாக $(R_2 - R_1)$ அளவாகச் செயற்படும். $R_1 = R_2$ ஆனால், அசைவற்ற நிலை ஏற்படும்.

இரு விசைகள் ஒரு துகள் மேல் அல்லது ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியில் வெவ்வேறு திசைகளில் செயற்படுமானல், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையென்ன? விசை

களின் இணைகர விதி என்ற விதிப்படி அவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசைகாணலாம்.

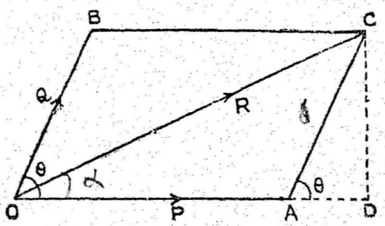
4–1. **விசைகளின் இணைகர விதி** (Parallelogram Law of forces): ஒரு புள்ளியில் வெவ்வேறு திசைகளில் இரண்டு குறிப்பிட்ட அளவுடைய விசைகள் செயற்படுமானால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை, பின் கூறப்படுகின்றபடி காணப்படும்.

பரிசோதனை முறை:

அப்புள்ளியின் வழியாக அவ்விரு விசைகளையும் வசதியான அளவுச் சட்டப்படி, அவை செயற்படும் திசைகளில் நேர் கோடுகளால் குறிப்பிட்டு, அவ்விரு கோடுகளையும் அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரம் வரைந்தால், அப்புள்ளி வழியாக உள்ள அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் அளவிலும் திசையிலும், (கூட்டு) விளைவு விசையைக் குறிப்பிடும். இது பரிசோதனை முறையில் காணப்பட்ட விதி (Experimental law).

குறிப்பு: புள்ளியில் செயற்படும் விசைகளெனக் கூறியபடியால், அப்புள்ளியை ஒரு துகள் எனவும் கொள்ளலாம்.

படம் 4–1-ல் $OACB$ என்பது ஓர் இணைகரம். ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுச் சட்டப்படி P, Q என்ற விசைகளை OA, OB குறிப்பிடுகின்றன.



படம் 4-1.

$$\overline{OA} = \overline{P}$$
$$\overline{OB} = \overline{Q}$$

(கூட்டு) விளைவு விசை $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$

$$= \overline{OA} + \overline{OB}$$
$$= \overline{OA} + \overline{AC}$$
$$= \overline{OC}$$

என்ற வெக்டரியல் கூட்டல் பயன்படுவது காண்க.

4-1.1. (கூட்டு) விளைவு விசையின் அளவும் திசையும்

O என்ற புள்ளியில் செயற்படும் P, Q என்ற விசைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனக் கொள்க; P, Q, θ-ன் அளவுகள் தெரிந்தால், R-ன் அளவும் திசையும் கணக்கிடலாம். இணைகரம் $OABC$-ல் (படம் 4-1.) C-லிருந்து $CD \perp OA$ வரைந்து OA ஐ நீட்டினுல், OA ஐ CD சந்திக்குமிடம் D எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned} OC^2 = R^2 &= OD^2 + DC^2 \\ &= (OA+AD)^2 + DC^2 \\ &= (P+Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2 \\ &= P^2+Q^2 + 2PQ\cos\theta \end{aligned}$$

எனவே, R-ன் மதிப்பு $= \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$. Rஇன் திசை காண, $\angle AOC = \alpha$ எனக் கொண்டு α இன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} \tan\alpha = \frac{CD}{OD} &= \frac{CD}{OA+AD} \\ &= \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta} \end{aligned}$$

எனவே, R-ன் திசையும் அளவும் பெறப்படுகிறது.

குறிப்பு (i): $P = Q$ ஆனுல்

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos\theta} \\ &= \sqrt{4P^2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2P\cos\frac{\theta}{2} \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{P\sin\theta}{P+P\cos\theta}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

எனவே, $P=Q$ ஆனுல் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திசை சம

விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தை இரு சரி பாதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

குறிப்பு (ii) : P, Q வெவ்வேறாகி $\theta = 90°$ ஆனல்,

$$R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 90^\circ}$$

$$= \sqrt{P^2+Q^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin 90}{P+P\cos 90}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

இணைகரம் செவ்வகமாவதைக் காண்க.

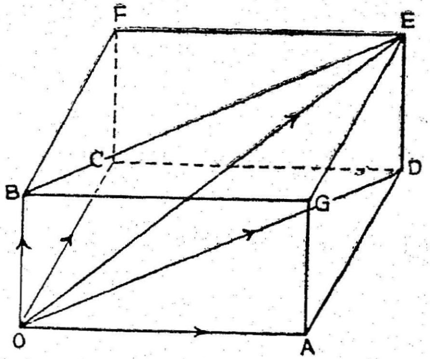
குறிப்பு (iii): இரு குறிப்பிட்ட விசைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் செயற்படும் போது, ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான (கூட்டு) விளைவு விசைதான் உண்டு.

4-1.2. இணைகர விதி ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணப் பயன்படும். இரு விசைகளும் ஒரே தளத்திலிருக்கும்; ஏனெனில், சந்திக்கும் விசைக்கோடுகள் இரண்டும் அத்தளத்தை உருவாக்கும். ஒரு புள்ளியில், ஒரு தளத்திலில்லாத மூன்று விசைகள் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை இணைகரத் திண்ம விதிப்படி (Parallelopiped of forces) பெறப்படும். அவ்விதி யாவது :

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் (ஒரே தளத்தமையாத) மூன்று விசைகள் அப்புள்ளியின் வழியாக வரையப்படும் மூன்று கோடுகளால் அளவு, திசை குறிக்கப்பட்டால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை அப்புள்ளியோடு அம்மூன்று கோடுகளையும் பக்கங்களாகக் கொண்டு வரையப்படும் இணைகரத் திண்மத்தில் குறுக்கு எதிர் உயர் உச்சியை இணைக்கும் மூலை விட்டத்தால் திசை, அளவு வகையில் முழுவதும் குறிக்கப்படும். (படம் 4-1.2) பார்க்க.

$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ என்பவை O-ல் செயற்படும் ஒரு தளத்தமையா மூன்று விசைகள்.

$\overline{OA}$, $\overline{OC}$-ன் (கூட்டு) விளைவு விசை இணைகரம் $OADC$-ல் $\overline{OD}$



படம் 4-1.2.

$\overline{OD}$, $\overline{OB}$-ன் கூட்டு (விளைவு) விசை இணைகரம் $OBED$-ல் $\overline{OE}$.

$$\text{அதாவது } \overline{OA}+\overline{OC}+\overline{OB} = \overline{OA}+\overline{AD}+\overline{OB}$$
$$= \overline{OD}+\overline{OB}$$
$$= \overline{OD}+\overline{DE}$$
$$= \overline{OE}$$
$$= \overline{R}$$

இணைகரத் திண்மம் $OADCFBGE$-ல் $\overline{OE}$ என்பது மூன்று விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைத் திசையிலும் அளவிலும் குறிக்கிறது. OE-ன் அளவையும் திசையையும் வடிவ கணித முறைப்படி கணக்கிடலாம். பயிற்சியாகக் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு: 1. இருவிசைகள் P, Q-ன் (கூட்டு) விளைவு R. Q ஐ இரட்டித்தால் R இரட்டிக்கிறது. Q ஐ நேரெதிர்த் திசையில் மாற்றினாலும், R இரட்டிக்கிறது. அப்போது $P^2 : Q^2 : R^2 = 2 : 3 : 2$ என நிறுவுக.

முதலாவதாக $R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$ (1)

இரண்டாவது $4R^2 = P^2+4Q^2+4PQ\cos\theta$ (2)

மூன்றாவதாக $4R^2 = P^2+Q^2-2PQ\cos\theta$ (3)

(1) + (3) $5R^2 = 2P^2+2Q^2$ (4)

$$(2)=(3) \quad \therefore \quad P^2+4Q^2+4PQ\cos\theta = P^2+Q^2-2PQ\cos\theta \qquad (5)$$

$$3Q^2 = -6PQ\cos\theta \qquad (6)$$

$$3Q = -6P\cos\theta$$

$$Q = -2P\cos\theta \qquad (7)$$

(1)-ல் (7) ஐ ஈடு செய்ய

$$R^2 = P^2+4P^2\cos^2\theta - 4P^2\cos^2\theta$$

$$= P^2 \qquad (8)$$

(4)-லிருந்து $5R^2 = 2R^2+2Q^2$

$$2Q^2 = 3R^2$$

$$Q^2 = \frac{3}{2}R^2 = \frac{3}{2}P^2$$

$$\therefore \quad P^2 : Q^2 : R^2 = 1 : \frac{3}{2} : 1$$

$$= 2 : 3 : 2$$

எடுத்துக்காட்டு 2: இரு சம விசைகள் 2θ என்ற கோணத்தைத் தாங்கும்போது இருக்கும் (கூட்டு) விளைவு விசையும் அதே இரு சம விசைகள் 2ϕ என்ற கோணத்தைத் தாங்கும்போது இருக்கும் (கூட்டு) விளைவு விசையும் 3 : 1 என்ற விகிதத்திலுள்ளன. $3\cos\phi = \cos\theta$ என நிறுவுக.

இரு விசைகள் P, P எனக் கொள்க. முதலில் கொடுத்துள்ளபடி அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $R_1 = \sqrt{2P^2 + 2P^2\cos 2\theta}$

$= 2P\cos\theta$ எனப் பெறப்படும்.

இரண்டாவது கொடுத்துள்ளபடி

$$R_2 = 2P\cos\phi$$

ஆனால் $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3}{1}$

$$\frac{2P\cos\theta}{2P\cos\phi} = \frac{3}{1}$$

$$\cos\theta = 3\cos\phi.$$

பயிற்சி 4 (a)

1. P, Q என்ற இரு விசைகளும் அளவுகளும், அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணங்களும் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒவ்வொன்றிற்கும் (கூட்டு) விளைவு விசையும், அது P உடன் பெற்றிருக்கும் சாய்வுக்கோணத்தையும் காண்க.

(1) $P = 6$ கி. கிராம்; $Q = 8$ கி. கிராம்; $\theta = 90$
(2) $P = 8$ கி.கி. $Q = 8$ கி.கி.; $\theta = 60$
(3) $P = a$ கி.கி $Q = 2\sqrt{2}\, a$ கி.கி.; $\theta = 45$

2. P, Q என்ற இரு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(2n+1)\sqrt{P^2+Q^2}$; அக்கோணம் $(90-\theta)$ஆனால்,(கூட்டு) விளைவு விசை$(2n-1)\sqrt{P^2+Q^2}$. அப்போது $\tan\theta = \frac{n-1}{n+1}$ என நிறுவுக.

3. இரு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை 15 கி.கிராம்; ஒரு விசை 13 கி.கி. ஆனால், மற்றொரு விசை 14 கி.கி. என நிறுவுக.

4. இரு விசைகள் 3 ; 5 கி. கிராம்; அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை 7 கி. கி; இடைப்பட்ட கோணம் 60° என நிறுவுக.

5. $P+Q$; $P-Q$ என்ற இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆக விருந்தால், முதலிரண்டு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{P^2+Q^2}{P^2-Q^2}\right)$ என நிறுவுக.

6. இரு விசைகள் P_1, Q_1 என்பவை α இடைப்பட்ட கோணமுடைய இருகோடுகளில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின்(கூட்டு) விளைவு விசை R_1 ; P_2, Q_2 என்ற வேறிரண்டு விசைகள் அதே கோடுகளில் செயற்படுகின்றன. (கூட்டு) விளைவு விசை R_2. R_1, R_2-க்கு இடைப்பட்ட கோணம்,

$$\cos^{-1}\left\{\frac{P_1P_2+Q_1Q_2+(P_1Q_2-P_2Q_1)\cos\alpha}{R_1R_2}\right\}$$ என நிறுவுக.

7. $P+Q$, $P-Q$ என்ற இரு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் 2α. அக் கோணத்தை இரு சம கூருக்கும் கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்வில் அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை இருக்கிறதெனில், $P \tan\theta = Q \tan \alpha$ என நிறுவுக.

8. ABC ஒரு முக்கோணம்; BC-க்கு AD குத்துக்கோடு. AB என்ற திசையில் $\sec B$ என்ற விசையும், AC என்ற திசையில் $\sec C$ என்ற விசையும் செயற்பட்டால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை AD வழியாக $(\tan B + \tan C)$ என்ற அளவு பெற்றது என நிறுவுக.

9. P, Q என்ற விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ; (கூட்டு) விளைவு விசை X. P, R என்ற விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமும் (கூட்டு) விளைவு விசையும் அவையே. Q, R என்ற விசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ ஆனால், (கூட்டு) விளைவு விசை Y.

$$P = (X^2+QR)^{\frac{1}{2}} = \frac{QR\,(Q+R)}{Q^2+R^2-Y^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

$P+Q+R=0$ ஆனால், $X = Y$ என நிறுவுக.

4-2. விசைகளின் முக்கோண விதி (Law of the Triangle of forces)

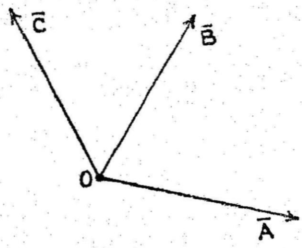
ஒரு துகளின் மேல் ஒரு விசை செயற்படுமானால், அத் துகள் இயங்க ஆரம்பிக்கும். ஒரு துகளின் மேல் இரு விசைகள் செயற்படுமானால், இணைகர விதிப்படி அவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை காண, அத் துகள், (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படுவதால் ஏற்படும் இயக்கத்தைப்பெறும். ஆனால், இவ்விரு விசைகளும் நேரெதிர்த் திசையில் சமமான விசைகளாயின், அத்துகள் அசைவற்று நிற்கும்.

வெக்டரியல்படி $\bar{A}+\bar{B}=\bar{R}$ [(கூட்டு) விளைவு விசை]
$\bar{A} + (-\bar{A})=0$ (பூச்சியம் — அசைவற்ற நிலை)

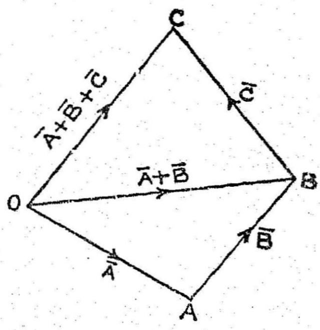
குறிப்பிட்ட அளவுள்ள மூன்று விசைகள், குறிப்பிட்ட திசைகளில் ஒரு துகளின் மேல் செயற்படுமானால்,

(i) அத் துகள் இயக்கம் பெறலாம்; அல்லது
(ii) அத் துகள் அசைவற்றிருக்கலாம்.

விசைகளை $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ என O–ல் (O துகளைக்குறிக்கிறதெனக் கொள்க) இயங்கினால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை படிப்படியாக இணைகர விதிப்படி அல்லது வெக்டர் கூட்டல் முறைப்படி காணலாம். (படம் 4-2.1., 4-2.2.) காண்க.



படம் 4-2.1



படம் 4-2.2

(i) வெக்டரியல்படி $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ காணலாம்.

படம் 4-2.2-ல் $\bar{A}+\bar{B} = \overline{OA} + \overline{AB}$

$$= \overline{OB}$$

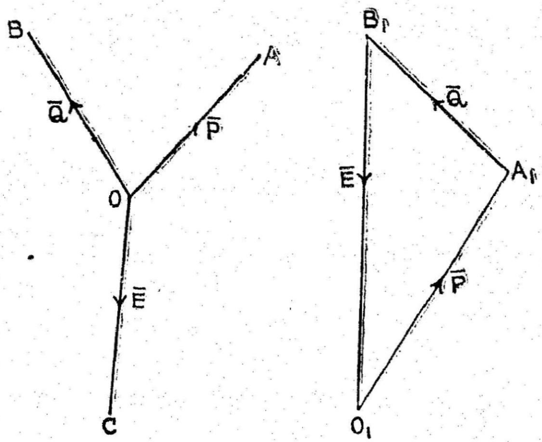
$$(\bar{A}+\bar{B})+\bar{C} = \overline{OB}+\overline{BC}$$

$$= \overline{OC}$$

$(\bar{A}+\bar{B}) + \bar{C} = \bar{A}+(\bar{B}+\bar{C})$ என நாம் வெக்டரியலில் 2-2.1 (viii)-ல் கண்டோம். எனவே, எந்த வரிசையில் வேண்டுமானாலும் $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணலாம். பொதுவாக இது இயலும். இக் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படுவதால் நிகழும் இயக்கம் ஏற்படும்.

(ii) இப்போது, O-ல் செயற்படும் மூன்று விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணும்போது, அம் மூன்று வெக்டர்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சிய வெக்டராக வருவதற்கும் ஏதுவுண்டு. பின்வரும் [படம் 4.2.3. (i); 4.2.3. (ii)] காண்க.

$\bar{P}, \bar{Q}, \bar{E}$ என்ற மூன்று விசைகள் O-ல் செயற்படுகின்றன வெனக்கொள்க. [படம் 4–2.3. (i).] காட்டப்பட்டி



படம் 4-2.3 (i) படம் 4-2.3 (ii)

ருக்கும் $\bar{P}+\bar{Q}+\bar{E}$ காண; முறைப்படி, வெக்டர்களின் உருவமைப்புப்படம் 4.2.3 (ii)–ல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

$$\bar{P}+\bar{Q}+\bar{E} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1O_1}$$
$$= \overline{O_1O_1} \quad (\text{பூச்சிய வெக்டர்})$$

எனப் பெறப்படுவதாகக் கொள்வோம். அப்போது இம் மூன்று விசைகளால் செயற்படும் துகள் O அசைவற்று நிற்கிறது. இது எப்போது? படத்தைப் பார்த்தால் $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{E}$ என்பவற்றின் வெக்டர் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்போது எனத் தெரிகிறதல்லவா? அதாவது $\bar{P}$, $\bar{R}$, $\bar{E}$ என்பவற்றின் வெக்டர் கூட்டுத்தொகை காண, 4.2.3 (ii) என்ற படம் வரையுங்கால் $\overline{O_1A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1O_1} = \overline{O_1O_1} = 0$ என்ற நிலை ஏற்படுமானால், O என்ற துகளின் மேல் அம் மூன்று விசைகளும் ஒருங்கே செயற்படும்போது அத் துகள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது.

இதிலிருந்து உருவாவது **விசைகளின் முக்கோண விதி:**

ஒரு புள்ளியில் (துகளின் மேல்) செயற்படும் மூன்று **விசைகளை வரிசைச் சுற்றுமுறையில்** ஒரு **முக்கோணத்தின்**

பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்க முடியுமானால், அவை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் (If three forces, acting on a particle be represented in magnitude and direction by the three sides of a triangle taken in order, they will be in equilibrium).

விசைகளின் முக்கோண விதியின் மறுதலை

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று விசைகள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்குமாயின், அவற்றினை வரிசையாகத் திசை, அளவு அடிப்படையில் ஒரு முக்கோணத்தின் முப்பக்கங்களால் உருவமைக்கலாம். அப் பக்கங்கள் வரிசைப்படி அம் மூன்று விசைகளின் திசைக் கோடுகளுக்கு இணைகோடுகளாக இருத்தல் வேண்டும். (If three forces acting at a point be in equilibrium, they can be represented in magnitude and direction by the sides of a triangle so as to have its sides parallel to the forces, taken in order).

இது வெக்டர் கூட்டல் விதிப்படி உடனடியாகத் தெரிகிறது. $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{E}$ என்ற வெக்டர்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. $\overline{P}+\overline{Q}+\overline{E}=0$ அதாவது $\overline{O_1A_1}+\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}=0$ $\therefore$ $\overline{O_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$ அவ்விசைகளை தனித் தனியாக உருவமைத்துக் காட்டும்.

$$\left.\begin{array}{l} O_1A_1 \parallel OA \\ A_1B_1 \parallel OB \\ B_1C_1 \parallel OC \end{array}\right\}$$ எனக் காண்க.

குறிப்பு: அளவுச் சட்டங்களுக்கு ஏற்றவாறு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் பல கிடைக்கும்.

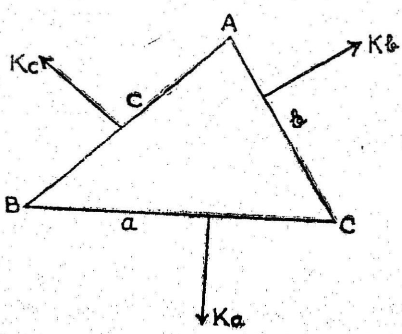
கிளைத் தேற்றம்: (1) ஒரு புள்ளியில் இரு விசைகள் செயற்படுமாயின் அவ்விரு விசைகளையும், வரிசையாக ஒரு முக்கோணத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்களால் குறிப்பிட்டால், அம் முக்கோணத்தின் மூன்றும் பக்கம் எதிர்த்திசையில் அவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையை அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கும்.

[படம் 2-3.2 (*ii*)]-ல்

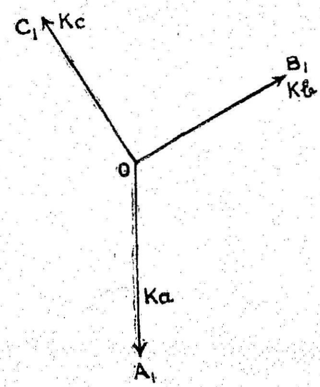
$$\overline{P}+\overline{Q}=\overline{O_1A_1}+\overline{A_1B_1}$$
$$=\overline{O_1B_1}$$

என்ற வெக்டர் கூட்டலைத்தான் இக் கிளைத்தேற்றம் கூறுகிறது. $\bar{P}, \bar{Q}$ இவற்றிற்கு (கூட்டு) விளைவு விசை $\overline{O_1B_1}$ $\bar{P}, \bar{Q}$ இவற்றிற்கு எதிர்ச்சமனி $\overline{B_1O_1}$.

கிளைத் தேற்றம் (2): ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கத்திற்கு வரையக் கூடிய செங்குத்துக் கோடுகளுக்கு இணையான திசைகளில், முக்கோணப் பக்கங்களுக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ள விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயற்படுமாயின், அவை அசைவற்ற நிலையில் இருக்கும். [படம் 4-2.4. (i)., 4-2.4. (ii)] காண்க.



படம் 4-2.4 (i)



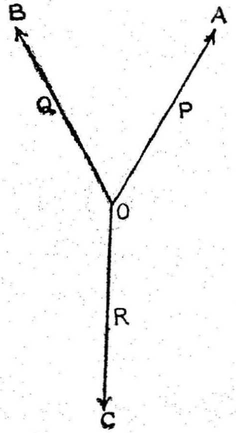
படம் 4-2.4 (ii)

விசைகளை ஒரு செங்கோணம் சாய்வில் திருப்பினால், விசைகளைக் குறிக்கும் கோடுகள் (தகுந்த அளவுச் சட்டத்தில்) ஒரு முக்கோணப் பக்கங்களாக அமையும். எனவே, இத் தேற்றம் உண்மையாகிறது.

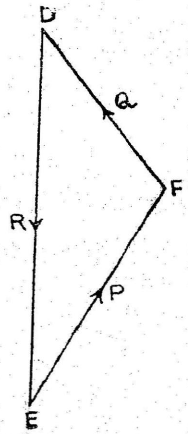
4-3. **இலாமித் தேற்றம்** (Lami's Theorem): **ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று விசைகள் அசைவற்ற நிலையில் இருப்பின், ஒவ்வொரு விசையும் மற்றிரு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தின் நெடுக்கைக்கு** (sine of the angle between the other two forces) **நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.** [படம் 4-3. (i)., 4-3. (ii).]

[படம் 4-3 (i)]-ல் O என்ற புள்ளியில் OA, OB, OC என்ற திசைகளில் P, Q, R என்ற விசைகள் செயற்பட்டு அசைவற்ற நிலையில் உள்ளன (O—அசைவற்ற நிலை). எனவே, முக்கோண

விதியின் மறுதலை விதிப்படி, ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே P, Q, R என்ற விசைகளை (ஓர் அளவுச் சட்டப்படி) குறிக்கும் வகையில் DEF என்ற முக்கோணம் வரையலாம்.



படம் 4-3. (i)



படம் 4·3. (ii)

அப்போது $OC \parallel DE$; $OA \parallel EF$; $OB \parallel FD$;

$DE = R$; $EF = P$; $FD = Q$; மேலும்,

$$\left.\begin{aligned} 180 - \angle COA &= D\hat{E}F \\ 180 - \angle AOB &= E\hat{F}D \\ 180 - \angle BOC &= F\hat{D}E \end{aligned}\right\}$$ என்பனவற்றை வடிவ கணிதப் படி நிறுவலாம்.

எனவே, $\Delta\, DEF$-ல்

$$\frac{EF}{\sin\angle FDE} = \frac{FD}{\sin\angle DEF} = \frac{DE}{\sin\angle EFD}$$

$$\therefore \frac{EF}{\sin(180 - B\hat{O}C)} = \frac{FD}{\sin(180 - C\hat{O}A)} = \frac{DE}{\sin(180 - A\hat{O}B)}$$

$$\therefore \frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle COA} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$$

அதாவது

$$\frac{P}{\sin\ Q\,\hat{}\,R} = \frac{Q}{\sin\ R\,\hat{}\,P} = \frac{R}{\sin\ P\,\hat{}\,Q}$$

இங்கு $P\hat{}Q$ எனில், விசை Q-க்கும், விசை P-க்கும் இடைப் பட்ட கோணமெனக் கொள்க.

மூன்று விசைகளுக்குப் பொருந்திய முக்கோண விதியை நான்கு, ஐந்து...பல விசைகளுக்கு விரித்துப் பலகோண விதி யென்ற விதியைக் காணலாம்.

(இது வெக்டர் கூட்டல் விதியை நான்கு, ஐந்து ... பல வெக்டர்களுக்கு விரிவு செய்வதற் கொப்பானதே யாகும்.)

4–4. விசைகளின் பலகோண விதி (Polygon of forces)

ஒரு புள்ளியில் பல விசைகள் செயற்பட்டு அவை யாவும், அளவு, திசை யொட்டி, வரிசையாக ஒரு மூடிய பல கோணத் தின் பக்கங்களாக உருவமைக்க முடியுமானல், அவ்விசை கள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

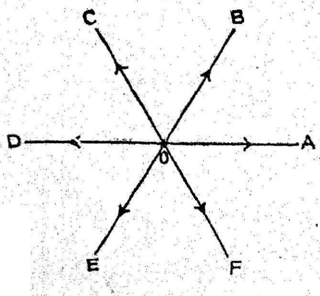
வெக்டரியல்படி $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ என ஆறு விசைகள் O என்ற புள்ளியில் OA, OB, OC, OD, OE, OF என்ற திசை களில் செயற்படுகின்றன வென்று கொள்வோம். [படம் 4-4. (i). 4-4. (ii)] காண்க. வெக்டரியல்படி அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை,

$$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}+\bar{E}+\bar{F} = \overline{O_1 A_1} + \overline{A_1 B_1} + \overline{B_1 C_1} + \overline{C_1 D_1} + \overline{D_1 E_1} + \overline{E_1 O_1}$$

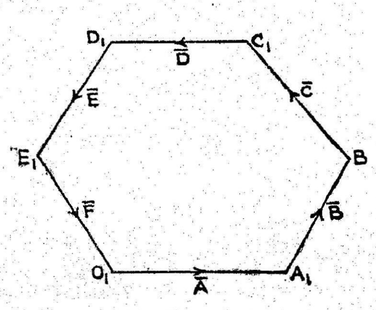
$$= \overline{O_1 O_1} \quad \ldots \quad \ldots \text{ (வெக்டரியல் படி)}$$

$$= 0 \text{ (பூச்சிய வெக்டர்)}$$

எனவே அசைவற்ற நிலை.



படம் 4-4(i)

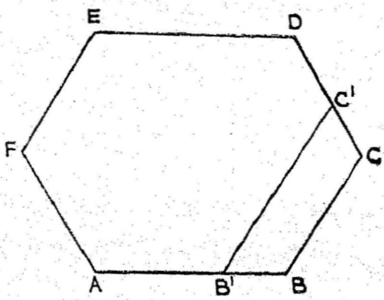


படம் 4-4. (ii)

குறிப்பு (i): இவ்விசைகள் ஒரே தளத்தில் செயல்பட வேண்டுமென்ற தேவையில்லை. இப் பலகோணம் ஒரே தளத்தில் அமையாவிட்டாலும், (கூட்டு) விளைவு வெக்டர் பூச்சியமாகும்.

குறிப்பு (ii): இவ்விதியின் மாறுதலை உண்மையல்ல; அதாவது ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிற விசைகளை, அளவு, திசையொட்டி வரிசையாக ஒரு மூடிய பல கோணத்தின் பக்கங்களாக உருவமைக்க முடியுமென்பது பொருந்தாது. ஏனெனில், ஒன்றுக்கொன்று சமமான கோணங்கள் பெற்ற இரு பலகோணங்களின் பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்தில் இருக்க வேண்டிய தேவையில்லை; முக்கோணங்களில் ஒன்றுக்கொன்று சமமான கோணங்கள் பெற்ற இரு முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்கள் ஒரே விகிதத்திலிருக்கும்; இது பல கோணங்களுக்குப் பொருந்தாது. [படம் 4-4. (iii)] பார்க்க.

பலகோணம் $ABCDEF$-ம் $AB'C'DEF$-ம் ஒன்றுக்கொன்று சம கோணங்கள் உடையவை. ஆனால், பக்கங்கள் சம விகிதத்தில் இராது எனப் பார்த்தாலே தெரியும். ($B'C' \parallel BC$)

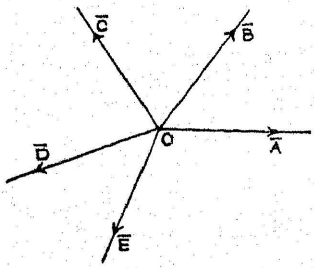


படம் 4-4. (iii)

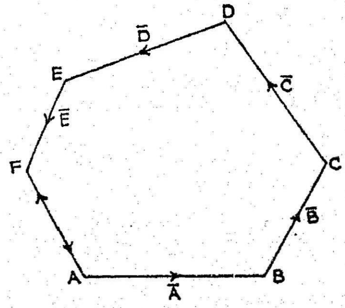
ஆனால், பல கோண விதி கொண்டு ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் பல விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணலாம்.

ஒரு புள்ளி O-ல் செயற்படும் விசைகள் $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ எனக்கொள்க. அவற்றின் திசைகளும் அளவும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. A என்ற ஒரு புள்ளியை ஆதியாகக்கொண்டு $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$-க்கு வெக்டர் கூட்டுத்தொகை காணும் முறையில் ஒரு மூடிய பலகோணம் பெறப்படின், அவ்விசைகள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்; மாறாக மூடாத பலகோணம் கிடைக்குமாயின் A-ஒரு கடைசி வெக்டரின் இறுதி முனையைச் சேர்க்கும் வெக்டர், (கூட்டு) விளைவு விசையைக் குறிக்கும். அதே விசையை நேரெதிர்த் திசையில் எடுத்தால், அது முதற் குறிப்பிட்ட விசைகளின் எதிர்ச்சமனியைக் குறிக்கும். ஏனெனில்,

(கூட்டு) விளைவு விசையும், எதிர்ச்சமனியும் நேரெதிர்த் திசைகளிலுள்ள சம விசைகளாதலின், அசைவற்ற நிலை ஏற்படும்.



படம் 4-4.1 (i)



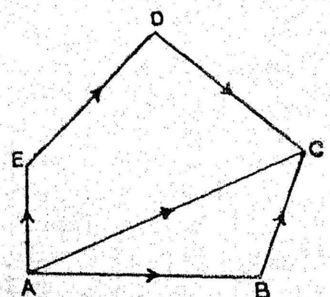
படம் 4-4.1 (ii)

[படம் 4-4.1. (i)., 4-4.1. (ii)]-ல்

$$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}+\bar{E} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$
$$= \overline{DE} + \overline{EF}$$
$$= \overline{AF} \left\{ \text{(கூட்டு) விளைவு விசை} \right\}$$

$$\overline{FA} + \overline{AF} = 0$$

எனவே, $\overline{FA}$ என்பது விசைகளின் எதிர்ச்சமனி. உருவப்படங்கள் வரைந்து, வடிவ கணித முறையில் முக்கோண விதிப்படி ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம்; பலகோண விதிப்படி ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் பல விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம்.



படம் 4-4.2

எடுத்துக் காட்டு (1): $ABCDE$ என்பது ஓர் ஐங்கோணம். ஒருதுகளில் செயற்படும் விசைகள் $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{ED}$, $\overline{AC}$ ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $3\,\overline{AC}$ என நிறுவுக. (படம் 4-4.2.)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$
$$\overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DC} = \overline{AC}$$

$\therefore \overline{(AB} + \overline{BC)} + \overline{(AE} + \overline{ED} + \overline{DC)} + \overline{AC}$

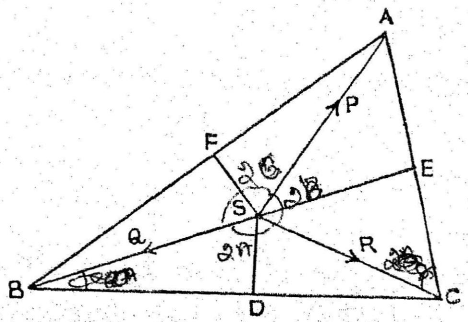
$= \overline{AC} + \overline{AC} + \overline{AC}$

$= 3\ \overline{AC}.$

எடுத்துக்காட்டு (2): ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம் S. S என்ற புள்ளியில் SA, SB, SC என்ற திசைகளில் செயற்படும். P, Q, R என்ற விசைகள் அசைவற்ற நிலையிலிருப்பின்,

$P : Q : R = a^2(b^2+c^2-a^2) \ : \ b^2\,(c^2+a^2-b^2) \ : \ c^2\,(a^2+b^2-c^2)$ என நிறுவுக.

(படம் 4-4.3) காண்க.



படம் 4-4.3

$\angle BSC = 2\,A$

$\angle CSA = 2\,B$

$\angle ASB = 2\,C$ என்பது வடிவ கணித முடிவுகள்.

$\therefore$ இலாமித் தேற்றப்படி,

$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

$= 2 \sin A \cos A : 2 \sin B \cos B : 2 \sin C \cos C$

$= 2\ \dfrac{a}{K}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : 2\,\dfrac{b}{K}\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) : 2\dfrac{c}{K}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

இங்கு $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{C}{\sin C} = K$ என்பதும்,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$$, இது போன்ற மற்றிரண்டும்

பயன் படுத்தப்படுகின்றன.

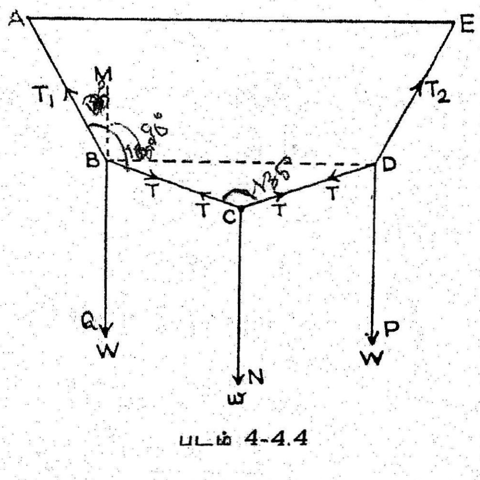
$$\therefore\ P : Q : R = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{abc} : \frac{b^2(c^2+a^2-b\ )}{abc}$$

$$: \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{abc}$$

$$= a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)$$ என

நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு (3): *ABCDE* என்ற ஓர் இலேசான கயிறு *E*, *A* என்ற இரு முனைகளும் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ளவாறு *B*, *C*, *D* என்ற இடங்களில் *W*, ω, *W* என்ற எடைகளைத் தாங்கித் தொங்குகிறது. *ABCDE* என்பது ஓர் ஒழுங்கான எண் கோணப் பகுதியாக (shape of part of a regular Octogon) அமைந்திருக்கிறது. $W = (\sqrt{2} + 1)\,\omega$ என நிறுவுக.



படம் 4-4.4

(படம் 4-4.4) காண்க. *ABCDE* ஓர் ஒழுங்கான எண் கோணப் பகுதியாதலின், $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 135°$ இழுவிசைகள் *B*, *C*, *D*–ல் குறிப்பிட்டபடி இயங்குகின்றன (T_1, T, T_2; $T_1 = T_2$ எனப் பின்னர் காணலாம்). $\triangle BCD$-ல் $BC = CD$ ஆதலால்,

$$\angle CBD = \angle CDB = 22\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$\angle DBM = 90^\circ$$

$$\angle ABM = 135^\circ - 90^\circ - 22\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$= 22\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$\angle DCN = \angle BCN = \tfrac{1}{2}(360 - 135)$$

$$= 112\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$\angle CDP = 180^\circ - 112\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$= 67\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$= \angle CBQ$$

என, இவ்வாருக முதலில் வடிவ கணித முறைப்படி இங்குள்ள உண்மைகளைக் கண்டு கொள்ள வேண்டும் (the geometrical conditions or facts). B என்ற புள்ளியில் $T_1 W$, T மூன்றும் அசைவற்ற நிலையிலுள்ளன. (CB, CD-ல் இழுவிசைகள் சமம்; ஏனெனில், $\angle BCN = \angle NCD$. D என்ற புள்ளியில் T, W, T_2 மூன்றும் அசைவற்ற நிலையிலுள்ளன.)

$\therefore$ இலாமித் தேற்றப்படி, B என்ற புள்ளியில்,

$$\frac{W}{\sin 45} = \frac{T}{\sin 67\frac{1}{2}} = \frac{T}{\sin(360 - 135 - 67\frac{1}{2})}$$

$$\therefore \frac{W}{\sin 45} = \frac{T}{\sin 67\frac{1}{2}} = \frac{T}{\sin 22\frac{1}{2}}$$

$$\therefore T = \frac{W \sin 22\frac{1}{2}}{\sin 45}$$

$$= \frac{W \sin 22\frac{1}{2}}{2 \sin 22\frac{1}{2} \cos 22\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{W}{2} \operatorname{Sec} 22\tfrac{1}{2} \qquad \ldots (1)$$

C என்ற புள்ளியில்

$$\frac{T}{\sin 112\frac{1}{2}} = \frac{T}{\sin 112\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{\operatorname{Sin} 135}$$

$$\therefore \frac{T}{\operatorname{Sin} 67\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{\operatorname{Sin} 45}$$

$$T = \frac{\omega \sin 67\frac{1}{2}}{\sin 45}$$

$$= \frac{\omega \cos 22\frac{1}{2}}{2 \sin 22\frac{1}{2} \cos 22\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\omega}{2} \operatorname{cosec} 22\frac{1}{2} \quad . . . \quad (2)$$

(1), (2) இரண்டையும் சமன்படுத்திப் பார்க்க.

$$\frac{W}{2} \sec 22\frac{1}{2} = \frac{\omega}{2} \operatorname{cosec} 22\frac{1}{2}$$

$$W = \omega \cot 22\tfrac{1}{2}^\circ$$

$$= \frac{\omega}{\tan 22\frac{1}{2}^\circ}$$

ஆனுல் கோண கணிதப்படி,

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2t}{1-t^2}$$

$2A = 45^\circ$ எனக் கொண்டால்,

$$1 = \tan 45 = \frac{2t}{1-t^2} \quad \left\{ t=\tan 22\tfrac{1}{2} \right\}$$

$$\therefore \quad 2t = 1-t^2$$

அதாவது $t^2+2t-1=0$

$$\therefore \quad \tan 22\tfrac{1}{2}^\circ = t = 1 \pm \sqrt{2}$$

இங்கு $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = (\sqrt{2}-1)$; ஏனெனில் $(-\sqrt{2}-1)$ குறையெண்ணுயிருப்பதாலும், $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ கூட்டு மதிப்பாயிருப்பதாலும், அத்தீர்வு பொருந்தாது.

$$\therefore \quad W = \frac{\omega}{\tan 22\frac{1}{2}}$$

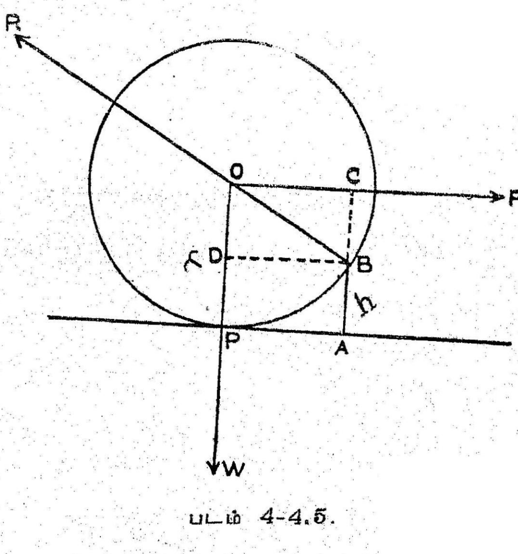
$$= \frac{\omega}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \omega(\sqrt{2}+1)$$

எடுத்துக்காட்டு (4): ஒரு கனமான வண்டிச் சக்கரம் (எடை W, ஆரம் r), h உயரமுள்ள ஒரு செங்குத்தான முளையைத் தாண்டி இழுக்கப்பட வேண்டும். F என்ற ஒரு விசை அச்சக்கரத்தைக் கிடைக் கோட்டுத் திசையில் செயற்பட்டு இழுக்கிறது. F என்பது $\frac{W\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ என்ற அளவுக்குச் சற்று மிகுதியாய் இருப்

பின் போதுமென நிறுவுக. (படம் 4-4.5)-ல் O சக்கர மையம். AB செங்குத்தான முளை. சக்கரம் அம்முளையில் B என்ற புள்ளியில் அழுத்தி நிற்கிறது. எனவே, அங்குச் செயற்படும் எதிர்வினை BO வழியாக R என்ற அளவிலிருக்குமெனக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், எதிர்வினை B–ல் தொடும் வட்டத் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாக விருக்கும்; அதாவது எதிர் வினை B வழியாகச் செல்லும் ஆரத் திசையிலிருக்கும்.

W என்பது O–ல் கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது. F என்பது கிடைக் கோட்டுத் திசை. அது செயற்பட்டுச் சக்கரம் முளையைத் தாண்டும் தருணம், F, R, W மூன்றும் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்; F சற்று மிஞ்சினால், சக்கரம் முளைக் குச்சியைத் தாண்டும். F சற்று அதிகமானால், சக்கரம் Bஐத் தாண்டிவிடும் எனக் கொள்வோம். இந்த நிலையில் F–ன் மதிப்புக் காண வேண்டும். இப்போது O என்ற புள்ளியில் செயற்பட்டு அசைவற்ற நிலையில் உள்ள R, F, W என்ற விசைகளுக்கு இலாமித் தேற்றப்படி,



படம் 4-4.5.

$$\frac{W}{\sin R\hat{O}F} = \frac{F}{\sin R\hat{O}W}$$

$$\therefore \; F = \frac{W \sin R\hat{O}W}{\sin R\hat{O}F}$$

$$= \frac{W \sin W\hat{O}B}{\sin B\hat{O}F}$$

இம்மதிப்புகளைக் காண பின்வரும் வடிவ கோண கணித முடிவுகள் பயன்படும்.

இங்கு $AC = PO = r$; $PD = AB = h$

எனவே, $DO = BC = r - h$

மேலும், $\triangle AOD$-ம் $\triangle BOC$-ம் செங்கோண முக்கோணங்கள். இவை யாவும் $\sin W\hat{O}B$, $\sin B\hat{O}F$ காணப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எனவே, $$\frac{W \sin W\hat{O}B}{\sin B\hat{O}F} = W. \frac{BD}{OB} \cdot \frac{OB}{BC}$$

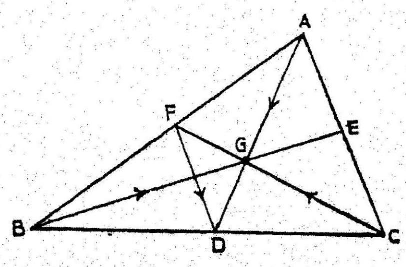
$$= W \frac{BD}{BC}$$

$$= \frac{W \sqrt{OB^2 - OD^2}}{OD}$$

$$= \frac{W \sqrt{r^2 - (r-h)^2}}{r-h}$$

எனவே, $F = \frac{W \sqrt{2rh - h^2}}{(r-h)}$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு (5): ABC ஒரு முக்கோணம்; BC, CA, AB-ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F. $\overline{AD}$, $\frac{2}{3}\overline{BE}$, $\frac{1}{3}\overline{CF}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை என்ன?



படம் 4-4.6.

[படம் 4-4.6-ல்] வடிவ கணிதப்படி AD, BE, CF மூன்றும் G-ல் சந்திக்கும். G என்ற புள்ளியில் இம் மூன்று மையக் கோடுகளும் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும்.

$$\therefore \quad \overline{AD}+\tfrac{2}{3}\overline{BE}+\tfrac{1}{3}\overline{CF} = \overline{AD}+\overline{BG}+\overline{GF}$$

$$= \overline{AD}+(\overline{BG}+\overline{GF})$$

$$= \overline{AD}+\overline{BF} \quad \text{(வெக்டர் கூட்டல்)}$$

$$= \overline{AD}+\overline{FA} \quad (\because BF=FA)$$

$$= \overline{FA}+\overline{AD}$$

$$= \overline{FD} \quad \text{(வெக்டர் கூட்டல்)}$$

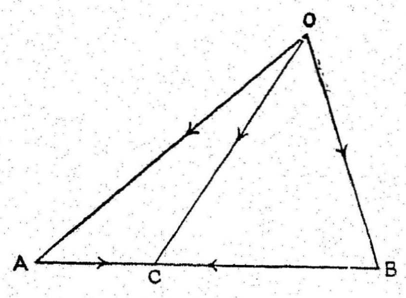
ஆனால், $FD = \frac{1}{2} AC$

$\therefore$ (கூட்டு) விளைவு விசை $\frac{1}{2}\overline{AC}$ என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படும்.

4-5. $\lambda \cdot \mu$ தேற்றம்

O என்ற புள்ளியில் $\lambda\,\overline{OA}$, $\mu\,\overline{OB}$ என்ற இரு விசைகள் செயற்படுமாயின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(\lambda+\mu)\,\overline{OC}$; AB–ல் $\lambda \cdot AC=\mu \cdot CB$ என்ற விகிதப்படி இடம் பெறும் (படம் 4–5.).

படம் 4–5-ல், AB-ல், C என்ற புள்ளி $\lambda\,(AC) = \mu\,(CB)$ என்ற வகையில் இடங் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. வெக்டரியல்படி,



படம் **4-5.**

$$\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC} \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1) × அளவை λ : $\lambda\ (\overline{OA} + \overline{AC}) = \lambda\ OC$ ... (3)

(2) × அளவை μ : $\mu\ (\overline{OB} + \overline{BC}) = \mu\ \overline{OC}$ ... (4)

(3) + (4) : $\lambda\ \overline{OA} + \mu\ \overline{OB} + \lambda\ \overline{AC} + \mu\ \overline{BC}$

$$= (\lambda + \mu)\ \overline{OC}$$

ஆனால், $\lambda\ (AC) = \mu\ (CB)$ என்று இருக்கிறபடியால்,

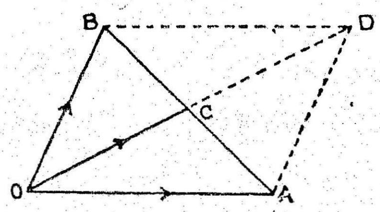
$\lambda\ \overline{AC} + \mu\ \overline{BC} = 0$ (நேரெதிர்த் திசைகளில் சமமான வெக்டர்கள்)

$\therefore\ \lambda\ \overline{OA} + \mu\ \overline{OB} = (\lambda + \mu)\ \overline{OC}$ என நிறுவப் படுகிறது.

குறிப்பு (1) : $\lambda = 1, \mu = 1$ ஆனால்,

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OC}$$

இங்கு AB-ன் மையப்புள்ளி C. இதுவே இணைகர விதி. (படம் 4–5·1) காண்க.



படம் 4-5.1

OC ஐ நீட்டி $CD = OC$ என்ற வகையில் D என்ற புள்ளியில், AD, BD இணைக்கப்பட்டால், $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும் (ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சம பாதியாக வெட்டிக் கொள்ளும் என்ற தேற்றத்தின் மறுதலைத் தேற்ற உண்மை).

இணைகர விதிப்படி, $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AD}$

$$= \overline{OD}$$

$$= 2\ \overline{OC}$$

குறிப்பு (2) : இத் தேற்றத்தை இரண்டு விசைகளுக்கு மட்டுமன்றிப் பல விசைகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம், மூன்று விசைகளுக்கு முதலில் பார்ப்போம்.

$\lambda \overline{OA}, \mu \overline{OB}, \gamma \overline{OD}$ என மூன்று விசைகள் O-ல் செயற்படுகின்றன. (படம் 4-5.2) காண்க,

$$\lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB} = (\lambda + \mu) \overline{OC} \left\{ \lambda\, AC = \mu\, CB \right\}$$

$$(\lambda + \mu) \overline{OC} + \gamma\, \overline{OD} = (\lambda + \mu + \gamma) \overline{OE}$$

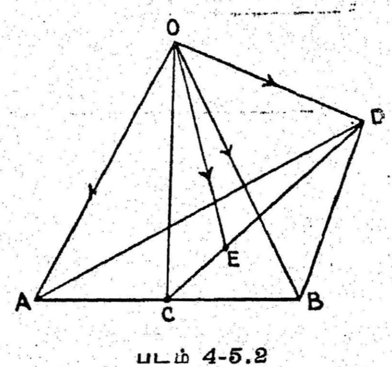
$$\left\{ (\lambda + \mu)\, CE = \gamma\, ED \right\}$$

$\lambda = \mu = \gamma = 1$ எனக் கொண்டால்,

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OD} = 3\,\overline{OE} \quad \left[\begin{array}{l} AC = CB \\ 2\,CE = DE \end{array} \right]$$

குறிப்பு (3): $\lambda = \mu = \gamma = 1$ எனக்கொண்டு, மேலும் பார்ப்போம்.

இங்கு ABD என்ற முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொண்டால், DC என்பது அம் முக்கோணத்தின் ஒரு மையக்கோடு (median). (படம் 4-5.2) பார்க்க.



படம் 4-5.2

அதில் $CE : DE = 1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளபடியால், E என்பது அம் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி (centroid). எனவே, இம் முடிவை ஒரு கிளைத் தேற்றமாக உருவாக்கினால்,

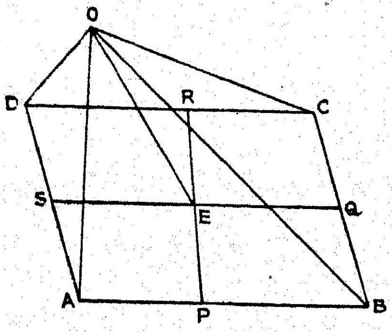
'PQR என்பது ஒரு முக்கோணம்; அதன் தளத்தில் O ஏதாவதொருபுள்ளி; OP, OQ, OR என்ற மூன்று விசைகள் O-ல் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $3\ \overline{OG}$; G என்பது அம் முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டுச் சந்தி' என்பது பெறப்படும்.

இங்கு O-க்குப் பதிலாக G என்ற புள்ளியில் $\overline{GP}, \overline{GQ}, \overline{GR}$ என்ற விசைகள் செயற்படின்,

$$\overline{GP} + \overline{GQ} + \overline{GR} = 3\ \overline{GG} = \text{பூச்சிய வெக்டர்.}$$

அதாவது G அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

4.6. **எடுத்துக்காட்டு** (1): $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்; எதிரெதிர்ப் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளுமிடம் E. O என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி. $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4\ \overline{OE}$ என நிறுவுக.



படம் 4-6.1

(படம் 4-6·1)-ல் $ABCD$ ஓர் இணைகரம்; AB, BC, CD, DA-ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே P, Q, R, S. PR—ம், QS—ம் வெட்டுமிடம் E.

$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4\ \overline{OE}$ என நிறுவுக.

4-5.—ல் உள்ள தேற்றப்படி,

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\ \overline{OP}$$

$$\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OQ}$$

$$\overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{OR}$$

$$\overline{OD} + \overline{OA} = 2\overline{OS}$$

$$\therefore 2\sum \overline{OA} = 2\,(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS})$$

$$\sum \overline{OA} = \overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS}$$

ஆனல், அதே தேற்றப்படி

$$\overline{OP} + \overline{OR} = 2\,\overline{OE}$$

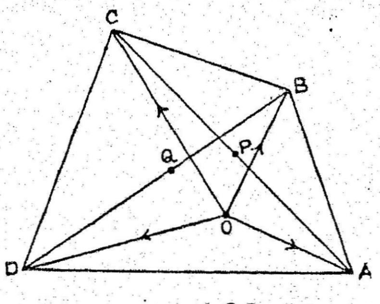
$$\overline{OQ} + \overline{OS} = 2\,\overline{OE}$$

$$\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} + \overline{OS} = 4\,\overline{OE}$$

$\therefore \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4\,\overline{OE}$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு (2) : $ABCD$ ஒரு நாற்கரம். எந்தப் புள்ளி Oஐ எடுத்து அதை A, B, C, D உடன் இணைத்துப் பெறப்படும் விசைகள் செயற்பட்டால், அவ்விசைகள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்க முடியுமோ அந்தப்புள்ளியைக் காண்க. அதாவது $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$ என்ற சமன்பாடு உண்மையாவதற்குப் பொருத்தமான ஒரு புள்ளி Oஐக் காண்க.

(படம்4-6·2)-ல் $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$ எனக்கொள்வோம். இதற்குகந்த O காணவேண்டும். AC, BD ஐ இணைத்து அவற்றின் மையப்புள்ளிகள் P, Q காண்க.



படம் 4-6.2

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = (\overline{OA} + \overline{OC}) + (\overline{OB} + \overline{OD})$$

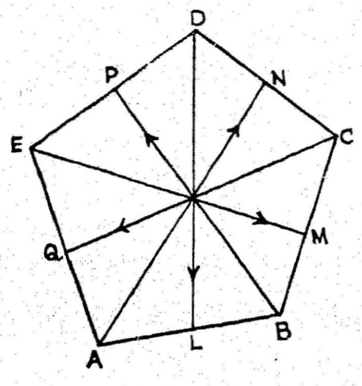
$$= 2\,\overline{OP} + 2\overline{OQ}$$

$$= 2\,(\overline{OP} + \overline{OQ})$$

இது பூச்சியமாக வேண்டுமானுல், O என்ற புள்ளி PQ-ன் மையப்புள்ளியாய் அமைதல் வேண்டும். எனவே, O என்ற புள்ளி நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப்புள்ளியா யிருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டு (3) : $ABCDE$ என்பது ஓர் ஐங்கோணம். AB, BC-ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே L, M, N, P, Q. ஏதாவதொரு புள்ளியில், $\overline{AN}$, $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$, $\overline{DL}$, $\overline{EM}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுமானுல், அவை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கு மென நிறுவுக.

(படம் 4-6·3.)-ல் அவ் விசைகள் அம்புக்குறி இடப்பட்டுள்ள திசைகளில் உள்ளன.



படம் 4-6.3.

$$\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BC} + \tfrac{1}{2}\overline{CD}$$
$$\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CD} + \tfrac{1}{2}\overline{DE}$$
$$\overline{CQ} = \overline{CD} + \overline{DE} + \tfrac{1}{2}\overline{EA}$$
$$\overline{DL} = \overline{DE} + \overline{EA} + \tfrac{1}{2}\overline{AB}$$
$$\overline{EM} = \overline{EA} + \overline{AB} + \tfrac{1}{2}\overline{BC}$$
$$\therefore\ \overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CQ} + \overline{DL} + \overline{EM}$$
$$= 2\tfrac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA})$$
$= 0$ (பல கோணவிதி)

எனவே, அவை ஒரு புள்ளியில் செயற்படுமாயின், அவை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

பயிற்சி 4 (b)

1. ஒரு கிடைக்கோட்டில் 26 செ. மீ. தூரத்தில் உள்ள A, B என்ற இரு புள்ளிகளில் 34 செ. மீ நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் முனைகள் கட்டப்பட்டு, ஒரு முனையிலிருந்து 10 செ. மீ. தூரத்தில் 10 கி. கிராம் எடை ஒன்று கட்டித் தொங்கவிடப் படுகிறது. கயிறு அறுந்து போகாமலிருந்தால், கயிற்றின் இரு பகுதிகளிலும் உள் விசைகளாகச் செயற்படும் இழு விசைகளைக் கணக்கிடுக.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தில் S அதன் சுற்று வட்ட மையம். P, Q, R என்ற விசைகள் SA, SB, SC வழியாகச் செயற்பட்டு அசைவற்ற நிலையிலுள்ளன.

$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ என நிறுவுக.

3. ஒரு முக்கோணம் ABC-ல் AD, BE, CF என்பவை கோணங்களின் சம வெட்டிகள்; $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$; அப்படியானல் அம் முக்கோணம் சம பக்க முக்கோணமாயிருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

4. ஒரு முக்கோணம் ABC உள்ளது. O என்ற புள்ளியில் OA, OB, OC வழியாக P, Q, R என்ற விசைகள் செயற்பட்டு அசைவற்ற நிலையில் உள்ளன. (i) O, அம் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியானல், $P : Q : R = AO : BO : CO$ என நிறுவுக. (ii) O, அம் முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையமானல், $P : Q : R = a : b : c$ என நிறுவுக.

5. ஒரு கிடைக்கோட்டில் A, B இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் இடைவெளி x செ. மீ. இரு இலேசான கயிறுகள் ($AC = a$ செ.மீ $BC = b$ செ. மீ.) ஓர் எடை Wஐத் தாங்கித் தொங்குகின்றன. CA, CB-ன் உள் விசையாகச் செயற்படும் இழு விசைகள் $b(a^2+c^2-b^2) : a(b_2+c^2-a_2)$ என்ற விகிதத்திலுள்ளன வென நிறுவுக.

6. கிடைத்தளத்திற்கு α அளவு சாய்வுடைய ஒரு சாய் தளத்தின் மேல் உள்ள ஓர் எடையில் ஒரு கயிறு கட்டி, கிடைக் கோட்டுக்கு β அளவு சாய்வில் அக்கயிற்றைப் பிடித்தால், எடை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. சாய் தளத்தின் சாய்வை γ அளவுக்கு மிகுதிப்படுத்திக் கயிற்றை அதே மாதிரிப் பிடித்து எடையை நிறுத்தும்போது, கயிற்றின் இழுவிசை முதலி லிருந்தது போல் இரு மடங்காகிறது. இங்கு $\cot\alpha = \tan\beta + 2\cot\gamma$ என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

7. ABC என்ற முக்கோணத்தில் O என்பது சுற்றுவட்ட மையம்; H என்பது செங்கோட்டு மையம். $\overline{AH} + \overline{BH} + \overline{CH} = 2\,\overline{OH}$ என நிறுவுக. (செ. ப. க.)

8. ஓர் ஆணியில் கட்டப்பட்டிருக்கும் இரு கயிறுகள் a, b நீளமுள்ளவை. தங்கள் மற்ற முனைகளில் l-நீளம், W எடை உள்ள ஒரு தூலத்தைத் தாங்கி நிற்கின்றன. அவற்றின் உள்ளே செயற்படும் இழு விசைகள் முறையே,

$$\frac{aW}{\sqrt{2a^2+2b^2-l^2}}, \quad \frac{bW}{\sqrt{2a^2+2b^2-l^2}}$$ என நிறுவுக.

9. $ABCDE$ ஓர் ஐங்கோணம்; AB, BC, CD, DE, EA என்ற பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் முறையே L, M, N, P, Q. அவ் வைங்கோண முனைகளான A, B, C, D, E-லிருந்து அந்தந்த முனைகள் இல்லாத பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளுக்கு வரையக்கூடிய வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயற்படுமானல், அவை, அசைவற்ற நிலையிலிருக்குமென நிறுவு. ($\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AP}$; $\overline{BN}$, $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$ . . . போன்ற 15 விசைகள்)

10. $ABCDE$ ஓர் ஐங்கோணம். ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைகள் $\overline{AB}$, $3\,\overline{BC}$, $2\,\overline{CA}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $2\,\overline{EB}$, $\overline{AE}$ என்ற சுயேச்சையான வெக்டர்களால் குறிக்கப்படுகின்றன. அவை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கு மென நிறுவுக.

11. $ABCD$, $A'\,B'\,C'\,D'$ என்பவை இரு இணை கரங்கள். ஒரு புள்ளியில் $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ என்ற சுயேச்சையான வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவை அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் என நிறுவுக.

12. ABC ஒரு முக்கோணம்; D, E, F என்பவை முறையே BC, CA, AB-ன் மையப் புள்ளிகள்; O ஏதாவதொரு புள்ளி. $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{DO} + \overline{EO} + \overline{FO} = 0$ என நிறுவுக.

(குறிப்பு : ABC என்ற முக்கோணத்தில் மையப்புள்ளி முக்கோணமான DEF-க்கும் ABC-க்கும் ஒரே ஒரு பொதுவான மையக்கோட்டு சந்தி உண்டு.)

13. $ABCD$ ஒரு சதுரம். ஒரு புள்ளியில் $\overline{AB}$, $2\,\overline{BC}$, $2\,\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ என்ற சுயேச்சை வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. அசைவற்ற நிலை நில்வுமென நிறுவுக.

14. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம்.
$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=3\,\overline{AD}$ என நிறுவுக.
$(\overline{AB}=\overline{ED};\quad \overline{CD}=\overline{AF})$

15. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். P-அத்தளத்தில் ஒரு புள்ளி. $\overline{PA}-\overline{PB}+\overline{PC}-\overline{PD}+\overline{PE}-\overline{PF}=0$ என நிறுவுக.

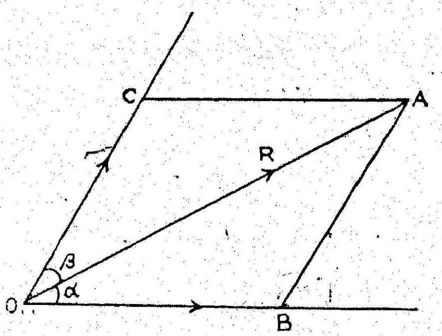
4-7. விசைப் பகுப்பு (Resolution of a force)

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரண்டு விசைகளுக்கு இணைகர விதிப்படி அல்லது வெக்டர் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம் எனப் பார்த்தோம்; ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் மூன்று அதற்கு மேற்பட்ட விசைகளுக்குப் பலகோண விதிப்படி அல்லது தொடர்ச்சியாக வெக்டர் கூட்டு விதிப்படி (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம் எனவும் பார்த்தோம்.

இப் பகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் செயற்படும் ஒரு விசையை ஏதேனும் இரு குறிப்பிட்ட திசைகளில் பிரிப்பதையும், சிறப்பாக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் இரு பகுதிகளாகப் பிரிப்பதையும் பார்ப்போம்.

சாய்வு திசைகளில் பகுப்பறிதல் (Resolved parts along two given directions—Oblique)

O என்ற புள்ளியில் *R* என்ற விசை *OA* என்ற திசையில் செயற்படுகிறதெனக் கொள்வோம். (படம் 4–7.) காண்க. *OB*, *OC* என்ற குறிப்பிட்ட திசைகளில் செயற்படக்கூடிய எந்த இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையாக *R* இருக்குமோ, அந்த இரு விசைகளைக் காண்பதே அச்சாய்வு திசைகளில் *R*-ன் பகுதிகளைக் காண்பதற் கொப்பாகும்.



படம் 4-7.

OA என்பது *O*-ல் செயற்படும் *R* என்ற விசை; $\overline{OA}=\bar{R}$ $\angle AOB=\alpha$; $\angle AOC=\beta$; கொடுக்கப்பட்ட இரு திசைகள் *OB*, *OC*. இவ்விரு திசைகளில் $\bar{R}$ஐ (கூட்டு) விளைவு விசையாகக் கொண்ட பிரித்த பகுதி விசைகளை (Components) வடிவகணித முறைப்படி காண்போம்,

$\overline{R}$ என்ற வெக்டரின் இறுதி முனையான A-லிருந்து OC-க்கு இணைகோடாக ABஐயும் OB-க்கு இணைகோடாக ACஐயும் வரைக. AB, AC என்பவை OB, OCஐ முறையே B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். வெக்டர் விதிப்படி,

$$\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BA}$$
$$= \overline{OA}$$
$$= \overline{R}$$

எனவே, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ என்பவை நாம் காண முற்பட்ட பகுதிகளாகும். வடிவ கணித முறைப்படி $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ஐ இவ்வாறு பெறலாம்.

கணித்துப் பெற வேண்டுமாயின், பின்வரும் முறையைக் கையாளலாம்:

$\Delta\, OAB$-ல், $\angle OAB = \beta$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$$\angle OBA = 180 - (\alpha + \beta)$$

எனவே, $$\frac{OB}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\ OB = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$OC = BA = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

எனவே, OB-ல் செயற்படும் பிரித்த பகுதி $\dfrac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

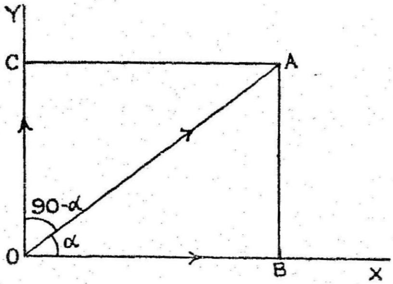
OC-ல் செயற்படும் பகுதி $\dfrac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

4-7·1. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் பிரித்த பகுதி விசைகளை அறிதல் (Resolved parts along any two mutually perpendicular directions)

$\overline{R}$ என்ற விசை $= \overline{OA}$ எனக் கொள்க.

OX, OY என்ற திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக O- வழியாகச் செல்லும் கோடுகள் (படம் 4-7.1).

முன் கூறியபடியே இணைகரம் வரைந்தால், ஒரு செவ்வகம் கிடைக்கும்.



படம் 4-7·1.

$$\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BA}$$

$= \overline{R}$ என்பது தெரிகிறது.

$\therefore \; OB = R \cos \alpha$

$OC = R \sin \alpha$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, OX, OY என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் R-ன் பிரித்த பகுதிகள் முறையே $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ எனப் பெறப்படும்.

4-7·1.1. வெக்டர் முறையில் [பகுதி 2, 2-9·2.1 (3)] காண்க.

$$\begin{aligned} \overline{R} &= (\overline{R} \cdot i)\,\overline{i} + (\overline{R} \cdot j)\,\overline{j} \\ &= R \cos \alpha\,\overline{i} + R \cos (90 - \alpha\,\overline{j}) \\ &= R \cos \alpha\,\overline{i} + R \sin \alpha\,\overline{j} \end{aligned}$$

$\therefore \; OB = R \cos \alpha$

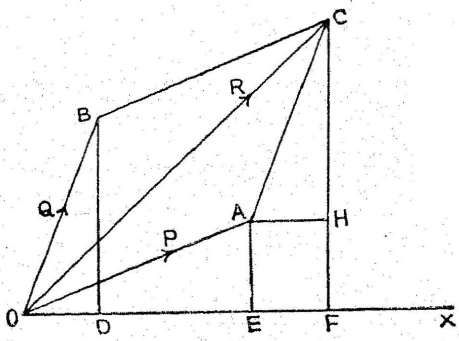
$OC = R \sin \alpha$

4-7·2. இவ்விரு முனைகளை யொட்டிய ஒரு தேற்றம் முக்கிய மானது. அதாவது :

தேற்றம் : ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் இரு விசைகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் பகுதிகளாகப் பெறப் படும் விசைகளின் இயற்கணிதக் கூட்டு விசை, அதே திசையில் முன் கூறிய இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் பகுதிக்குச் சமமாகும். (The algebraic sum of the

resolved parts of two forces in any direction is equal to the resolved part of their resultant in the same direction).

(படம் 4–7·2)-ல் $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ இரு விசைகள்; $\overline{OC}$ அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை. OX என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட திசை. படத்தில் காட்டிய குத்துக்கோடுகள் வரைந்து கொள்க.



படம் 4-7·2.

$$BD \perp OX$$
$$AE \perp OX$$
$$CF \perp OX$$
$$AH \perp CF$$
$$\overline{P} = \overline{OA}$$
$$\overline{Q} = \overline{OB}$$
$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AC}$$
$$= \overline{OC}$$
$$= \overline{R} \text{ (கொள்கை)}$$

$\overline{OE} = \overline{P}$-ன் பிரித்த பகுதி OX–வழியாக

$\overline{OD} = \overline{Q}$-ன் பிரித்த பகுதி OX–வழியாக

$\overline{OF} = \overline{R}$-ன் பிரித்த பகுதி OX-வழியாக

$\overline{OE} + \overline{OD} = \overline{OF}$ என நிறுவ வேண்டும்.

E, D, F என்பவை ஒரே நேர்கோட்டின் மேலிருப்பதால், $OE + OD = OF$ என்ற அளவைக் கூட்டல் சமன்பாட்டை நிறுவினால் போதுமானது.

$$\triangle\, OBD = \triangle\, ACH$$
$$\therefore\; OD = AH$$
$$= EF$$
$$OE+OD = OE+AH$$
$$= OE+EF$$
$$= OF$$

$\overline{OF} = \bar{R}$-ன் பிரித்த பகுதி — OX வழியாக என்பது நிறுவப்படுகிறது.

4–7·2.1 **வெக்டர் முறைப்படி**

$$\bar{P} = (\bar{P}\cdot\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{P}\cdot\bar{j})\,\bar{j}$$
$$\bar{Q} = (\bar{Q}\cdot\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{Q}\cdot\bar{j})\,\bar{j}$$
$$\therefore\; \bar{R} = (\bar{P} + \bar{Q})$$
$$= (\bar{P}\cdot\bar{i} + \bar{Q}\cdot\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{P}\cdot\bar{j} + \bar{Q}\cdot\bar{j})\,\bar{j}$$

$\therefore$ OX–ன் மேல் $\bar{R}$–ன் பிரித்த பகுதி

$$= (\bar{P}\cdot\bar{i} + \bar{Q}\cdot\bar{i})\,\bar{i}$$
$$= (\bar{P}\cdot\bar{i})\,\bar{i} + (\bar{Q}\cdot\bar{i})\,\bar{i}$$

$=$ OX–ன் மேல் $\bar{P}$–ன் பகுதி

$+$ OX–ன் மேல் $\bar{Q}$–ன் பகுதி.

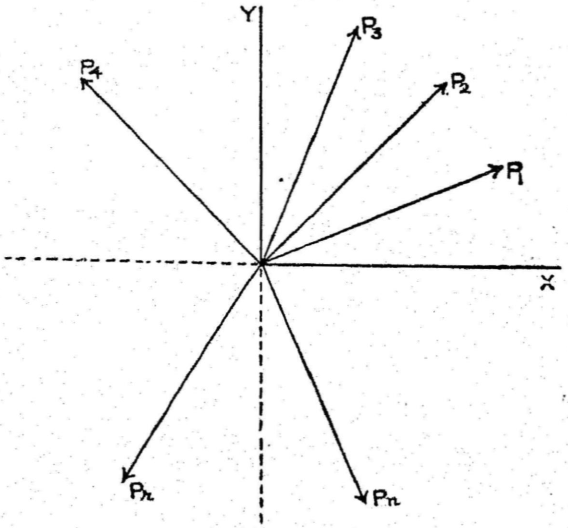
4–7·3. இத்தேற்றத்தைப் பன்முறைப் பயன்படுத்தினால், பொதுத் தேற்றம் கிடைக்கும்.

தேற்றம்: ஒரு புள்ளியில் பல விசைகள் செயற்படுகின்றன. ஏதாவதொரு திசையில் அவற்றின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கணிதக் கூட்டுத் தொகையும் அதே திசையில் அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் பிரித்த பகுதியும் சமம்.

4-8. **ஒரு புள்ளியில் பல விசைகள் ஒரே தளத்தில் குறிப்பிட்ட திசைகளில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணல்**

(படம் 4-8)-ல் காட்டியபடி $P_1, P_2 \ldots P_r \ldots P_n$ என்ற விசைகள் O-ல் ஒரே தளத்தில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காண வேண்டும். O வழியாக இரு செங்குத் தச்சுகள் OX, OY என அத் தளத்தில் எடுத்துக்

கொள்க. OX என்ற திசைக்கு $P_1, P_2 \ldots P_n$ என்ற விசைக் கோடுகளின் சாய்வுகள் $\theta_1\ \theta_2 \ldots \theta_n$ எனக் கொள்க.



படம் 4-8.

இவ் விசைகள் ஒவ்வொன்றையும் OX, OY என்ற திசைகளில் பிரிக்கவும். OX என்ற திசையில் அவ் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை

$X = P_1 \cos\theta_1 + P_2 \cos\theta_2 + \ldots + P_n \cos\theta_n$ எனவும், அவ்வாறே OY என்ற திசையில் அவ்விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கணிதக்கூட்டுத் தொகை

$Y = P_1 \sin\theta_1 + P_2 \sin\theta_2 + \ldots + P_n \sin\theta_n$ எனவும் காணலாம். ($P_1, P_2, \ldots P_n;\ \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ யாவும் தெரிந்தவை). இவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை R எனவும், அது OX-க்கு θ அளவு சாய்வில் இருக்கிறதெனவும் கொண்டு R, θ காண்பதே நமது நோக்கம். OX, OY என்ற திசைகளில் R-ன் பிரித்த பகுதிகள் முறையே $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ ஆகும். எனவே, 4-7·3-ல் கூறிய தேற்றப்படி,

$$R\cos\theta = X = \sum_{r=1}^{n} P_r \cos\theta_r$$

$$R \sin\theta = Y = \sum_{r=1}^{n} P_r \sin \theta_r$$

இரண்டையும் இருபடிக்குயர்த்திக் கூட்டினால்

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= (\sum P_r \cos \theta_r)^2 + (\sum P_r \sin \theta_r)^2$$
$$= \sum P_r^2 + 2 \sum_{r \neq s}^{n} P_r P_s \cos (\theta_r - \theta_s) \qquad \ldots \quad (A)$$

$$\tan \theta = \frac{R \sin \theta}{R \cos \theta} = \frac{\sum P_r \sin \theta_r}{\sum P_r \cos \theta_r} = \frac{Y}{X} \qquad \ldots \quad (B)$$

A என்பது (கூட்டு) விளைவு விசையின் அளவையும்,

B என்பது அவ்விசையின் திசை OX–க்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணத்தையும் தரும்.

கிளைத்தேற்றம் : $R=0$ ஆனால், தனித்தனியாக

$X = \sum P_r \cos \theta_r = 0$; $Y = \sum P_r \sin \theta_r = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை. $R=0$ எனில், இவ்விசைகள் அசைவற்ற நிலையில் உள்ளனவென்பது விளக்கமாகத் தெரிகிறது.

எனவே, **தேற்றம்: பல விசைகள்** O **என்ற ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் போது,** O **அசைவற்ற நிலையில் இருக்க வேண்டுமானால் (i) தேவையான கட்டுப்பாடு (ii) போதுமான கட்டுப்பாடு யாவையெனில்:**

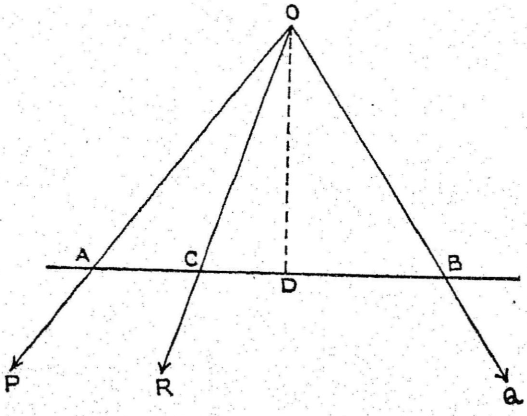
அவ்விசைகள் எவையாகிலும் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் பிரிக்கப்பட்டால், தனித்தனியே அவ்விரு திசைகளிலும் பெறப்படும் பகுதிகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக வேண்டும். இது ஒரு முக்கியமான தேற்றம்.

நிறுவன் முறை: (i) **தேவையானது:** $R = 0$ ஆனால், $X = 0$, $Y = 0$ என்ற இரு கட்டுப்பாடுகளும் தேவையானவையாகின்றன.

(ii) **போதுமானது:** $X = 0$, $Y=0$ ஆனால், $R = 0$ எனப் பெறப்படுகிறது. அதாவது அசைவற்ற நிலைக்கு $X=0$, $Y = 0$ என்பவை போதுமான கட்டுப்பாடுகளாகின்றன.

4-9. **எடுத்துக்காட்டு** (1): P, Q, R என்ற விசைகள் O-ல் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் இயங்கு கோடுகள் (lines of action) ABC என்ற நேர்கோட்டை முறையே A, B, C-ல் வெட்டுகின்றன. R என்பது P,Q என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையானால், $\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$ என நிறுவுக.

(படம் 4-9.1)-ல் காட்டியபடி விசைகள் O-ல் செயற்படுகின்றன. O-லிருந்து ABC-க்கு OD என்ற குத்துக்கோடு வரைக.



படம் 4-9.1.

OD என்ற திசையில் P-ன் பிரித்த பகுதி $P \cos A\hat{O}D$

Q-ன் பிரித்த பகுதி $Q \cos B\hat{O}D$

R-ன் பிரித்த பகுதி $R \cos C\hat{O}D$

R என்பது P,Q-ன் கூட்டு விளைவு விசை யாதலின்,

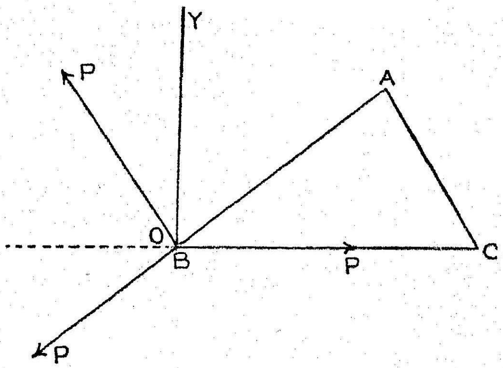
$R \cos C\hat{O}D = P \cos A\hat{O}D + Q \cos B\hat{O}D$ (தேற்றம் 4-7.2.)

அதாவது $R. \frac{OD}{OC} = P. \frac{OD}{OA} + Q. \frac{OD}{OB}$

$$\frac{R}{OC} = \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB}$$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு (2): ஒரு புள்ளியில் P,P,P என்ற மூன்று சம விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு

இணை கோட்டுத் திசைகளில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $P\sqrt{3-(2\cos B+2\cos C+2\cos A)}$ என நிறுவுக.



படம் 4-9.2.

(படம் 4-9.2)-ல் O என்ற புள்ளியை B எனவே கொள்க. BCஐ அதாவது OCஐ, x அச்செனவும் அதற்குச் செங்குத்தான OYஐ, y அச்செனவும் கொண்டு P,P,P என்ற விசைகள் OX, OY வழியாகப் பகுதிப்படுத்தி இயற்கணிதக் கூட்டல் செய்க.

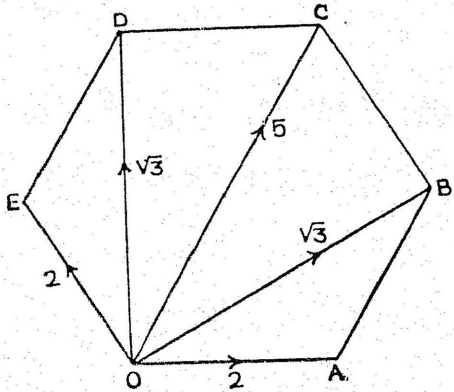
$$OX \rightarrow \text{வழியாக}: P+P\cos(180-B\hat{C}A)+P\cos(180+A\hat{B}C)$$
$$= P-P\cos C-P\cos B$$
$$OY\uparrow \text{வழியாக}: P\sin(180-B\hat{C}A)+P\sin(180+\hat{A}BC)$$
$$= P\sin C-P\sin B$$
$$\therefore R^2 = (P-P\cos C-P\cos B)^2+(P\sin C-P\sin B)^2$$
$$= P^2+P^2+P^2-2P^2\cos C-2P^2\cos B$$
$$+2P^2\cos B\cos C-2P^2\sin B\sin C$$
$$= 3P^2-2P^2\cos C-2P^2\cos B+2P^2\cos(B+C)$$
$$= 3P^2-2P^2\cos C-2P^2\cos B-2P^2\cos A$$
$$\therefore R = P\sqrt{3-(2\cos A+2\cos B+2\cos C)}$$

எனப் பெறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு(3) : 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 கி.கிராம் விசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து, அம்

முனையை மற்ற முனைகளோடு சேர்க்கும் கோடுகளின் திசைகளில் செயற்படுகின்றன. (கூட்டு) விளைவு விசை அளவையும், திசையையும் காண்க.

(படம் 4-9.3)-ல் காட்டியபடி O-ல் அவ்விசைகள் செயற்படுகின்றன.



படம் 4-9.3.

$\angle AOD = 90°$

$\angle AOB = 30°$

$\angle AOC = 60°$

$\angle AOE = 120°$ என வடிவ கணிதப்படி நமக்குத் தெரியும்.

OA ஐ X அச்சாகவும், OD ஐ Y அச்சாகவும் கொண்டு எல்லா விசைகளையும் OA, OD-ன் திசைகளில் பிரிக்கவும்.

$$OA\rightarrow: X = 2 + \sqrt{3}\cos 30 + 5\cos 60 + \sqrt{3}\cos 90 + 2\cos 120$$

$$= 2 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} - 1$$

$= 5$ கி. கிராம்

$$OD\uparrow: Y = \sqrt{3}\sin 30 + 5\sin 60 + \sqrt{3}\sin 90 + 2\sin 120$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$= 5\sqrt{3}$ கி. கிராம்.

$\therefore$ (கூட்டு) விளைவு விசை $R = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$

$= 10$ கி. கிராம்

R—ன் திசை OA-க்கு θ அளவு சாய்விலிருப்பின்

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{5\sqrt{3}}{5}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

பயிற்சி 4 (C)

1. ஒரு புள்ளியில் P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, $6P$ என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன; செயற்படும் திசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணப் பக்கங்களுக்கு இணையான கோடுகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. (கூட்டு) விளைவு விசை $6P$ எனவும், இயங்கு திசை முதல் விசைக்கு 240° அளவில் சாய்ந்திருக்கிறதெனவும் நிறுவுக. (ப.க)

2. ஒரு துகளின் மேல் n விசைகள், மிகச்சிறியவை, f அளவுடையவை, நிலைக்குத்துத் தளத்தில் செயற்படுகின்றன; கிடைக்கோட்டுக்கு 0, $\frac{\alpha}{n-1}$, $\frac{2\alpha}{n-1}$, ... α என்ற கோணங்களுடைய கோடுகள் அவற்றின் திசைகள். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $f \sin\left(\frac{n\alpha}{2(n-1)}\right) \Big/ \sin\left(\frac{\alpha}{n-1}\right)$ எனவும் கிடைக்கோட்டுக்கு $\frac{\alpha}{2}$ சாய்வுள்ள திசையும் என நிறுவுக. (ப.க)

[குறிப்பு : $\cos 0 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots\ldots\ldots$

$$+ \cos(n-1)\theta = \cos(n-1)\frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

$\sin 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots\ldots\ldots$

$$+ \sin(n-1)\theta = \sin(n-1)\frac{\theta}{2} \cdot \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

என்ற கூட்டு வாய்பாடுகள் பயன்படும்.]

3. $ABCDEF$ என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். A என்ற புள்ளியில் $\overline{AB}$, $2\overline{AC}$, $3\overline{AD}$, $4\overline{AE}$, $5\overline{AF}$ என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\sqrt{351}\,AB$ எனவும், AB-யுடன் அது சாய்ந்து செயல்படும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$ எனவும் நிறுவுக. (ப.க)

4. ABC ஒரு முக்கோணம்; AD என்பது BC-க்குக் குத்துக் கோடு; AB வழியாக $\sec B$ என்ற விசையும், AC வழியாக $\sec C$ என்ற விசையும் A-ல் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை AD வழியாக $(\tan B + \tan C)$ அளவுடையதென நிறுவுக. (ப. க)

5. மீள் இயல்பற்ற ஒரு கயிறு நீளம் a, ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள A, B என்ற புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டுத் தன்னிச்சையாக நகரக்கூடிய W எடையுள்ள ஒரு வளையத்தைத்தாங்கி அசைவற்றிருக்கிறது. $AB=d$ ஆனால், $(a>d)$ அவ் வசைவற்ற நிலையில் இழுவிசை $Wa/2\sqrt{a^2-d^2}$ என நிறுவுக.

6. ஒரு கயிற்றின் முனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள A,B என்ற இரு புள்ளிகளில் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு வளையம் எடை W, தன்னிச்சையாக அக்கயிற்றில் நகர முடியும். அவ்வளையத்தை P எடையுள்ள ஒரு விசை கிடைக் கோட்டுத் திசையில் இழுத்து நிற்கிறது. அசைவற்ற நிலையில் அக்கயிற்றின் பகுதிகள் குத்துக் கோட்டுக்கு $60°$, $30°$ சாய்விலிருப்பின், கயிற்றின் இழுவிசை $W(\sqrt{3}-1)$ எனவும், P-ன் அளவு $W(2-\sqrt{3})$ எனவும் நிறுவுக. (அ.ப.க)

7. மேற்கூறிய கணக்கில் $60°$, $30°$-க்குப் பதிலாக θ,ϕ என்ற கோணங்கள் கொண்டு P-ன் மதிப்பு $W\tan\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$ என நிறுவுக. (ப.க)

8. மேற்கூறிய கணக்கில் (6-ல்) $AB = c$ எனவும் $P=W$ எனவும், கயிறு நீளம் l எனவும் கொண்டால், கயிற்றில் செயல்படும் இழு விசை $\frac{lW}{\sqrt{2l^2-c^2}}$ என நிறுவுக.

9. *ABCDEF* ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். *A* என்ற புள்ளியில் 2, 3, $2(1+\sqrt{3})$, $2+\sqrt{3}$ அளவுடைய விசைகள் முறையே *AB*, *AC*, *DA*, *AF* என்ற திசைகளில் செயற்பட்டால், அவை அசைவற்ற நிலையில் உள்ளனவென நிறுவுக.

10. *ABCD* ஒரு சதுரம். ஒரு புள்ளியில் $\overline{AB}$, $2\,\overline{BC}$, $2\,\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ என்றவெக்டர்களால் குறிப்பிட்டவிசைகள் செயற்படுகின்றன. அவை அசைவற்ற நிலையிலுள்ளன வென நிறுவுக.
(ப.க.)

5. இணை விசைகள்

(Parallel forces)

5-1. சென்ற பகுதிகளில், ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் பல விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணும் முறைகளைக் கண்டோம். இப் பகுதியில் இணை விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும்போதுஅவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு என்னவெனக் காணலாம்.

இம்மாதிரியான இணை விசைகளை நாம் நிலையியலில் பல சூழ்நிலைகளில் காண்கிறோம்.

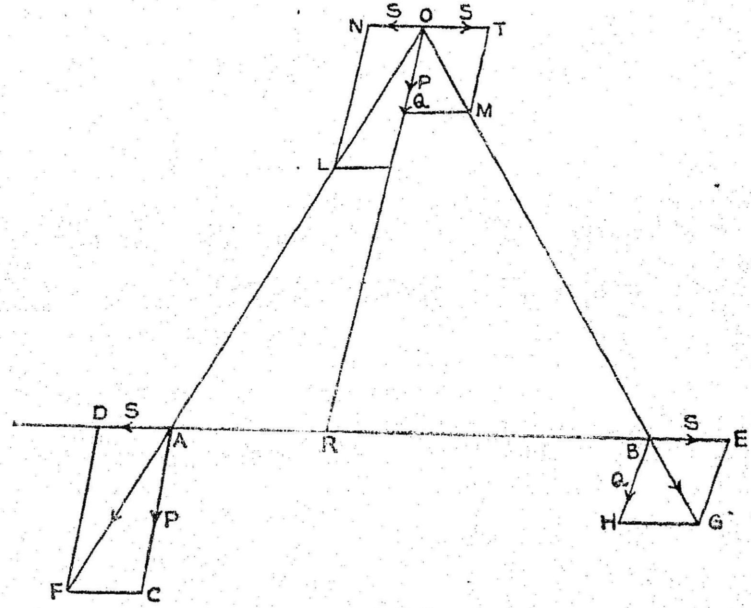
ஒருபோகு இணை விசைகள் (Like parallel forces) : இரு இணை விசைகள் ஒரே திசையில் செயற்படின், அவை ஒருபோகு இணை விசைகள் எனப்படும்.

எதிர்போகு இணை விசைகள் : (Unlike parallel forces) : இரு இணை விசைகள் எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படின், அவை எதிர்போகு இணை விசைகள் எனப்படும். இரண்டுக்கு மேற்பட்டவைகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

இரண்டு ஒருபோகு இணை விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணல் (Finding the resultant of two like parallel forces)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் A, B என்ற இடங்களில் முறையே P, Q என்ற இரு ஒருபோகு இணை விசைகள் செயற்படட்டும். AC, BH என்பவை முறையே அவ்விசைகளைத்திசை அளவில் குறிக்கட்டும். (படம் 5-2.) காண்க. இவ்விரு விசை

களின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணல் வேண்டும். AB என்ற நேர்கோட்டிலேயே S, S என இரு சம விசைகள்



படம் 5-2

நேரெதிர்த் திசைகளில் AD, BE என்ற அளவுகளால் படத்தில் குறிக்கப்பட்டபடி செயற்படுவதாகக் கொள்க. இவ்விரு விசைகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுவதால், இவ்விரு விசைகளைப் பொறுத்தமட்டில் ஒன்றுக்கொன்று எதிரீடு செய்து கொண்டு, பொருளின் சமநிலையைப் பாதிக்காது. **எனவே, P, Q என்ற விசைகளால் என்ன விளைவு ஏற்படுமோ, அதுவேதான் இந்த இரு விசைகள் S, S-ம் அவ் விசைகளோடு சேர்ந்து செயற்படும் போதும் ஏற்படும்.**

இணைகர விதிப்படி (படம் 5-2)-ல் $\overline{AF}$ என்பது A-ல் செயற்படும் $\overline{P} + \overline{S} = \overline{AC} + \overline{AD}$-க்குச் சமம்; அவ்வாறே B-ல் செயற்படும் $\overline{Q} + \overline{S} = \overline{BH} + \overline{BE} = \overline{BG}$

AF-ம் BG-ம் நீட்டப்பட்டு O-ல் சந்திக்கட்டும். விசை செலுத்தப்படும் தன்மை விதிப்படி (3-4-ல் காண்க) A-ல் செயற்படும் $\overline{AF}$ ஐயும், B-ல் செய்யற்படும் $\overline{BG}$ ஐயும் O என்ற புள்ளிக்கு மாற்றுக ; இடப் பெயர்ச்சியால் விளைவு மாறுது.

$\overline{OL} = \overline{AF}$ எனவும், $\overline{OM} = \overline{BG}$ எனவும் அளந்து குறிக்கவும். $\overline{OL}$ ஐ, அதன் பிரித்த பகுதிகளான $\overline{P}$, $\overline{S}$ என்று பிரிக்கவும். $\overline{OM}$ ஐ, $\overline{O}$-ல் அதன் பிரித்த பகுதிகளான $\overline{Q}$, $\overline{S}$ என்று பிரிக்கவும்.

$$\text{அதாவது } \overline{OL} = \overline{P} + \overline{S}$$
$$\overline{OM} = \overline{Q} + \overline{S}$$

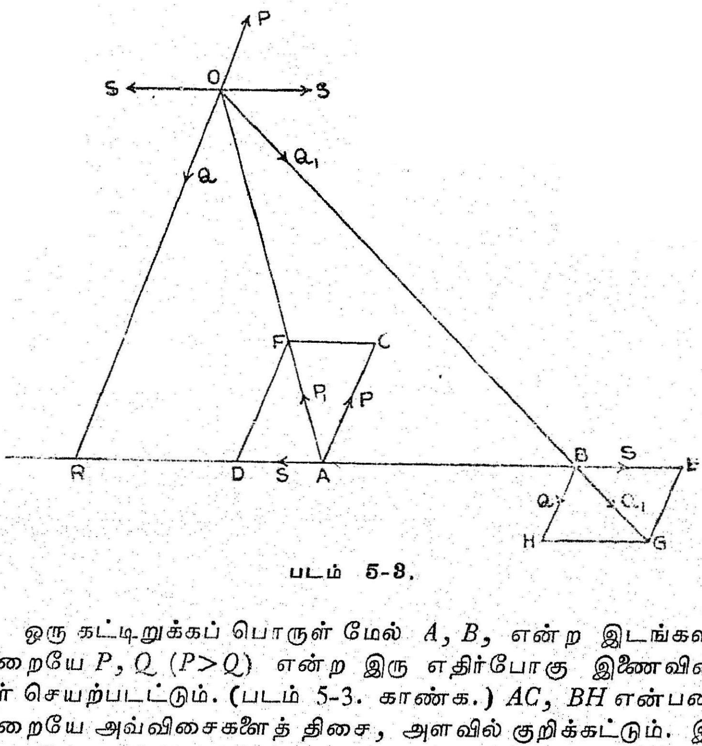
இங்கு O-ல் $\overline{S}$, $\overline{S}$ நேரெதிர்த் திசைகளில் ஒரே நேர் கோட்டில் செயற்படுவதால் அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு மட்டும் பூச்சியம் அல்லது அசைவற்ற நிலை. எனவே, எஞ்சி நிற்பவை OR என்ற நேர்கோட்டில் ($OR \parallel AC \parallel BH$) P, Q என்ற அளவோடு ஒரே திசையில் இயங்கும் விசைகளாம். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையானது OR என்ற திசையில் $P+Q$ என்ற அளவுடையதாயிருக்கும். இப்போது $P+Q$ என்ற விசையை O-லிருந்து அதே நேர்கோட்டிலுள்ள R என்ற புள்ளிக்கு மாற்றிச் செயற்படுத்தலாம்; இடப் பெயர்ச்சியால் விளைவு மாறாது. இப்போது AB-ன் மேல் R ஐ இடங் குறிக்கலாம். படத்தில் பார்த்தால்,

$$\triangle ACF \parallel \triangle OAR \quad \ldots\text{(i)}$$
$$\triangle BHG \parallel \triangle ORB \quad \ldots\text{(ii)}$$
$$\therefore \frac{P}{S} = \frac{AC}{CF} = \frac{OR}{AR}$$
$$\therefore AR = \frac{S}{P} OR \quad \ldots\text{(iii)}$$
$$\text{அவ்வாறே } \frac{Q}{S} = \frac{BH}{HG} = \frac{OR}{RB}$$
$$\therefore RB = \frac{S}{Q} . OR \quad \text{(iv)}$$
$$\therefore P.AR = Q.RB = S.OR$$

அல்லது $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{Q}{P}$ என்ற விகிதப்படி AB-ன் மேல் R இடங் குறிக்கப்படும். எனவே $\overline{P}$, $\overline{Q}$ என்ற ஒத்த இணைவிசைகள் முறையே A, B என்ற இடங்களில் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை அளவு $P + Q$; செயற்படும் இடம், AB-ன் மேல் $P.AR = Q.RB$ என்ற சமன்பாட்டின்படி R என அமையும். (அதாவது R என்ற புள்ளி AB என்ற நீளத்தை $Q : P$ என விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் உட்புறத்தில் பிரிக்கும்).

கிளைத்தேற்றம் : $P=Q$ ஆகும் (கூட்டு) **விளைவு விசையளவு** $2P$; **செயற்படுமிடம்** AB-**ன் மையப்புள்ளி.**

5–3. இரண்டு எதிர்போகு இணை விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேற் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணல் (Finding the resultant of two unlike parallel forces)



படம் 5-3.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் மேல் A, B, என்ற இடங்களில் முறையே P, Q $(P>Q)$ என்ற இரு எதிர்போகு இணைவிசைகள் செயற்படட்டும். (படம் 5-3. காண்க.) AC, BH என்பவை முறையே அவ்விசைகளைத் திசை, அளவில் குறிக்கட்டும். இவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைக் காணல் வேண்டும். AB என்ற நேர்கோட்டிலேயே S, S என இரு சம விசைகள் நேரெதிர்த் திசைகளில் AD, BE என்ற அளவுகளால் படத்தில் குறிக்கப்பட்டபடி செயற்படுவதாகக் கொள்க. சென்ற பத்தியில் கூறியபடி, அவ்விரு விசைகள் ஒன்றையொன்று எதிரீடு செய்து பொருளின் சம நிலையைப் பாதிக்காது. **எனவே,** P,Q **என்ற விசைகளால் என்ன விளைவு ஏற்படுமோ, அதுவேதான் இந்த விரு விசைகள்** S, S–**ம் அவ்விசைகளும் சேர்ந்து செயற்படும் போதும் ஏற்படும்.**

இணைகர விதிப்படி (படம் 5–3.)-ல் $\overline{AF}$ என்பது A-ல் செயற்படும் $\overline{P}+\overline{S} = \overline{AC} + \overline{AD}$-க்குச் சமம்; அவ்வாறே B ல் செயற்படும் $\overline{Q} + \overline{S} = \overline{BH} + \overline{BE} = \overline{BG}$

AF–ம் BG–ம் நீட்டப்பட்டு, O–ல் சந்திக்கட்டும்.

5–2.-ல் குறித்தபடி அங்குக் கூறப்பட்ட எல்லா உண்மைகளும் இங்கும் பொருந்தும். O-ல் செயற்படும் $\overline{AF}$–க்குச் சமமான விசைகளை அதன் பிரித்த பகுதிகளான P, S என்பவற்றால் O–ல் ஈடு செய்க. அவ்வாறே $\overline{BG}$-க்குச் சமமான விசைகளை அதன் பிரித்த பகுதிகளான Q,S என்பவற்றால் O-ல் ஈடு செய்க. S-ம், S–ம் எதிரீடு கொடுத்துக் கொள்ளும். எஞ்சியது, P,Q என்பவை எதிரெதிர்த்திசைகளில் செயற்படும். $P>Q$ என நாம் கொண்டபடியால், இவற்றின் கூட்டு விளைவு விசை$(P-Q)$ என்ற அளவில் P-ன் திசையில் செயற்படும். இதுவே A,B-ல் செயற்படும் P, Q என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை; அளவு $(P-Q)$, செயற்படும் திசை R–லிருந்து O பக்கம். இவ் விசையை O–லிருந்து R–க்கு இடப் பெயர்ச்சி செய்வதால், விளைவு மாறாது. இப்போது R-ன் இடங் குறிப்போம்.

படத்தில் பார்த்தால்,

$$\triangle ADF \parallel\!\mid \triangle ARO$$

$$\triangle BHG \parallel\!\mid \triangle ORB$$

$$\frac{S}{P} = \frac{AD}{DF} = \frac{AR}{RO}$$

$$\therefore P = S.\frac{RO}{AR}$$

அவ்வாறே,

$$\frac{S}{Q} = \frac{HG}{BH} = \frac{RB}{RO}$$

$$\therefore Q = S.\frac{RO}{RB}$$

$$\therefore P.AR = Q.RB = S.RO$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{Q}{P}$$

அல்லது $\frac{AR}{RB} = \frac{Q}{P}$ என்ற விகிதப்படி AB-ன் மேல் BA-ன் நீட்டலில், R இடங்குறிக்கப்படும். எனவே, $\overline{P}$, $\overline{Q}$ என்ற எதிர் போகு இணை விசைகள் முறையே A, B என்ற இடங்களில்

செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையளவு $P-Q$; செயற்படும் இடம் R என்பது, AB-ன் மேல் $P \cdot AR = Q \cdot RB$ என்ற சமன்பாட்டின்படி அமையும். [அதாவது R என்ற புள்ளி AB என்ற நீளத்தை $Q : P$ என விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் வெளியே (externally) பிரிக்கும்.]

குறிப்பு (1): $P=Q$ ஆனால், $\overline{P}+\overline{S}$-க்கும் $\overline{Q}+\overline{S}$-க்கும் இணை கர விதிப்படி பெறப்படும் (கூட்டு) விளைவு விசைகள் இணை கோடுகளில் செயற்பட்டு அவை எங்கும் சந்திக்காது. எனவே, இப் பத்தியில் கூறப்பட்ட வரைவு முறை தோல்வியுற்று (கூட்டு) விளைவு விசைகள் வெட்டுமிடம் கிடைக்காது போகும். ஆனால், $P-Q = P-P=0$ என்று கிடைத்தாலும் கட்டிறுக்கப் பொருள் அசைவற்று இராது. ஏனெனில், P, Q என்ற விசைகள் சமமாயிருந்தும் நேரெதிர்த்திசைகளிலிருந்து ஒரே நேர்கோட்டில் செயற்படவில்லை என்பதைக் காண்க. இவ்வாறு ஒரே நேர் கோட்டில் செயற்படாத இரு சமமான எதிர்போகு இணை விசைகள் ஒரு தனிப்பட்ட வகையிற்படும். அவை சுழலிணைகள் (couples) என்ற தலைப்பில் பின்னர் விளக்கப்படும்.

குறிப்பு (2): வடிவகணித மரபுப்படி AB என்ற நீளமுள்ள நேர்கோட்டை வெளியே $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தலுக்குக் குறைக்குறியிட்டால், இங்கு $\dfrac{AR}{RB} = -\dfrac{Q}{P}$ எனக் கூறலாம்; P-ன் திசை கூட்டுத் திசை (positive direction) யெனவும், Q-ன் நேர் எதிர்த்திசை குறைத்திசை(negative direction) எனவும் கொண்டு P-க்குக் கூட்டுக் குறியும், Q-க்குக் குறைக் குறியும் கொடுத்தால், AB என்பது R என்ற இடத்தில் $-Q : P$ என்ற நேர் மாறு விகிதத்தில் பிரிக்கப்படுகிறதெனக் கொள்ளலாம். P-க்குக் குறைக் குறியிட்டு Q-க்குக் கூட்டுக் குறியிட்டாலும், இதேதான் வரும். இந்த முக்கியமான மரபு முறையை நாம் பல இணை விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடங்காணப் பயன்படுத்தினால், ஒரு வாய்பாடு கிடைக்கும். பின்னர் 5-4. காண்க.

எடுத்துக் காட்டாக, இரு எதிர்போகு இணை விசைகள் P, Q அலகுகள் அளவுடையவை முறையே $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ என்ற ஆயத்தொலை பெற்ற இடங்களில் செயற்படுகின்றன வெனக்கொள்வோம். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடம் $\dfrac{AR}{RB} = -\dfrac{Q}{P}$ என்ற விகித முறைப்படி வரும்

R-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\dfrac{Qx_2 - Px_1}{Q-P}, \dfrac{Qy_2 - Py_1}{Q-P}\right)$ எனப் பெறப்படும். இதையே $\left(\dfrac{Px_1 - Qx_2}{P-Q}, \dfrac{Py_1 - Qy_2}{P-Q}\right)$ எனவும் எழுதலாமெனக் காண்க.

ஒரே திசையில் இரு இணைவிசைகளும் செயற்பட்டால், R-ன் ஆயத்தொலைகள் $\left(\dfrac{Px_1 + Qx_2}{P+Q}, \dfrac{Py_1 + Qy_2}{P+Q}\right)$ எனப் பெறப்படும் என்பது கண்கூடு; ஏனெனில், $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை உட்புறமாக $Q : P$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், அப்போது R-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\dfrac{Px_1 + Qx_2}{P+Q}, \dfrac{Py_1 + Qy_2}{P+Q}\right)$ ஆகும்.

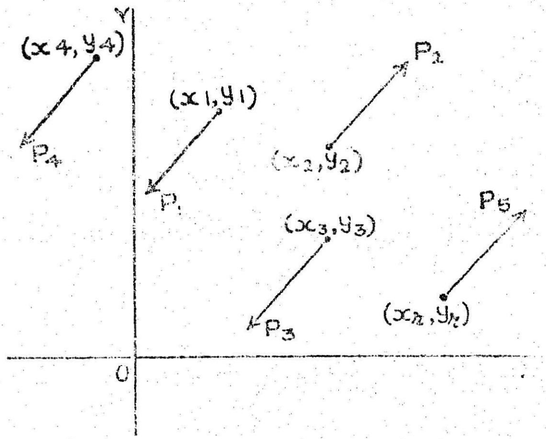
5-4. **பல இணை விசைகள் :** ஒரே திசையில் செயற்படும் பல இணைவிசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையைத் திரும்பத் திரும்ப 5-2-ல் விளக்கப்பட்ட முறையைப் பயன் படுத்திக் காண முடியும். எல்லா இணை விசைகளின் சாதாரணக் கூட்டுத் தொகையே, (கூட்டு) விளைவு விசையாகும்.

சில விசைகள் ஒரு திசையில் இணை விசைகளாகவும், மற்றும் சில நேரெதிர்த் திசையில் இணை விசைகளாகவும் இருப்பின், அவற்றின் கூட்டு விளைவு விசை அவ்விசைகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத் தொகையாகும் (algebraic sum). கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகப் பெறப்படின் 5-3-ல் குறிப்பு (i)-ல் கூறியபடி, ஒரு திசையில் சாதாரணக் கூட்டுத் தொகை X எனவும், எதிர்த் திசையில் சாதாரணக் கூட்டுத்தொகை அதே X எனவும் வரும். இவை இரண்டும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையைத் தராமல், ஓர் இரட்டை என்கிற தனி அமைப்பில் வரும்.

5-4·1. பொதுவாகப் பல இணை விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடம்: (இயற் கணிதக் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமென்பது மட்டும் விலக்கப்பட்டது)

(படம் 5-4.1)-ல் காட்டியபடி பல இணை விசைகள், சில ஒரு திசையிலும், மற்றவை, நேரெதிர்த் திசையிலும் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்குக் கூட்டுக்குறி கொடுத்து, எதிர்த் திசைக்குக் குறைக் குறி கொடுப்போம்.

முதலில் கூட்டுக்குறி திசையிலுள்ள விசைகள் $P_1, P_2, P_3 \ldots P_r$ எனவும், அவை செயற்படும் இடங்கள் (OX, OY என்ற ஒரு வசதியான அச்சுச் சட்டப்படி) $(a_1, b_1)(a_2, b_2)\ldots(a_r, b_r)$ எனவும், எதிர்த் திசையிலுள்ள விசைகள் $Q_1, Q_2 \ldots Q_s$ எனவும், அவை



படம் 5-4.1.

செயற்படும் இடங்கள் அதே அச்சுச்சட்டப்படி (A_1, B_1) (A_2, B_2) . . . (A_s, B_s) எனவும் கொள்வோம். முதலில் P வரிசை விசைகளை ஒவ்வொன்றாக எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $P_1 + P_2 + \ldots + P_r = P$.

P_1, P_2 என்ற இருவிசைகளின் கூட்டு விளைவு விசை $(a_1\ b_1)$ (a_2, b_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை $P_2 : P_1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்; எனவே, ஆயத்தொலை வடிவ கணித வாய்பாட்டின்படி $(P_1 + P_2)$ செயற்படும் இடம்

$$\frac{P_2\, a_2 + P_1\, a_1}{P_2 + P_1}, \quad \frac{P_2\, b_2 + P_1\, b_1}{P_2 + P_1} \quad \ldots \quad \text{(A)}$$

இப்போது $(P_1 + P_2)$ ஐயும், P_3 ஐயும் எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் கூட்டு விளைவு விசை $(P_1 + P_2 + P_3)$ செயற்படும் இடம் (A) என்ற புள்ளியையும், (a_3, b_3) என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டை $P_3 : (P_1 + P_2)$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். எனவே, ஆயத்தொலை வடிவ கணித வாய்பாட்டின் படி அவ்விடத்தின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\frac{\left\{P_3\, a_3 + (P_1 + P_2)\left(\dfrac{P_2\, a_2 + P_1\, a_1}{P_2 + P_1}\right)\right\}}{P_3 + P_2 + P_1},$$

$$\left\{\frac{P_3 b_3 + (P_1 + P_2)\left(\frac{P_2 b_2 + P_1 b_1}{P_2 + P_1}\right)}{P_3 + P_2 + P_1}\right\}$$

அதாவது $\left(\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{P_1 + P_2 + P_3}, \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{P_1 + P_2 + P_3}\right)$ ...(B)

இவ்வாறு படிப்படியாக நாம் செல்வோமானால், $(P_1 + P_2 + ... P_r)$ என்ற (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left(\frac{\overline{X_1} = \sum_{k=1}^{r} P_k a_k}{\sum_{k=1}^{r} P_k}, \frac{\overline{Y_1} = \sum_{k=1}^{r} P_k b_k}{\sum_{k=1}^{r} P_k}\right) \quad ...(C)$$

இவ்வாறே எதிர் இணை விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையான $Q_1 + Q_2 + ... + Q_s = Q$ செயற்படும் இடம்,

$$\left(\frac{\overline{X_2} = \sum_{k=1}^{s} Q_k A_k}{\sum_{k=1}^{s} Q_k}, \frac{\overline{Y_2} = \sum_{k=1}^{s} Q_k B_k}{\sum_{k=1}^{s} Q_k}\right) \quad ...(D)$$

இப்போது $P = \sum_1^r P_k$ என்ற விசையும்,

$Q = \sum_1^s Q_k$ என்ற விசையும்

முறையே $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1)$, $(\overline{X}_2, \overline{Y}_2)$ என்ற புள்ளிகளில் நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுகின்றன. $P > Q$ ஆனால், மொத்த (கூட்டு) விளைவு விசையான,

$(P-Q) = \sum_1^r P_k - \sum_1^s Q_k$ என்பது R என்ற இடத்தில் செயற்படுமானால், R என்பது $(\overline{X_1}, \overline{Y_1})$, $(\overline{X_2}\ \overline{Y_2})$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை வெளியே $Q : P$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். எனவே, R-ன் ஆயத்தொலைகள்,

$$\overline{X} = \frac{P\overline{X_1} - Q\overline{X_2}}{P - Q}, \quad \overline{Y} = \frac{P\overline{Y_1} - Q\overline{Y_2}}{P - Q}$$

இப்போது பொதுவாக,

$$\overline{X} = \frac{(P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots P_r a_r) - (Q_1 A_1 + Q_2 A_2 + \ldots Q_s A_s)}{(P_1 + P_2 + \ldots P_r) - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_s)}$$

$$\overline{Y} = \frac{(P_1 b_1 + P_2 b_2 + \ldots P_r b_r) - (Q_1 B_1 + Q_2 B_2 \ldots Q_s B_s)}{(P_1 + P_2 + \ldots P_r) - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_s)}$$

(படம் 5-4·1.ஐ மீண்டும் காண்க.

இன்னும் பொதுவாக $P_1, P_2 \ldots P_n$ என்ற பல இணை விசைகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ என்ற புள்ளிகளில் செயற்படுமானால், ஒரு திசை இணை விசைகளைக் கூட்டுக்குறியோடும், எதிர்த் திசை இணை விசைகளைக் குறைக்குறியோடும் ஏற்று,

$\overline{X} = \dfrac{\sum_1^n P_1 x_1}{\sum P_1}$ எனவும், $\overline{Y} = \dfrac{\sum_1^n P_1 y_1}{\sum P_1}$ எனவும் எழுதலாம்.

(அங்கங்கு உரிய குறிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.)

5-4.2. எடுத்துக்காட்டு (1)

5, 6, 7 அலகுள்ள இணைவிசைகள் ஒரு திசையிலும் 4, 3, 2 அலகுள்ள இணைவிசைகள் நேரெதிர்த் திசையிலும் முறையே (1,1), (2, −2), (3,4), (−1,3) (3, −2), (5, −1) என்ற புள்ளிகளில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையையும், அது செயற்படக்கூடிய இடத்தையும் காண்க.

(கூட்டு) விளைவு விசை $= 5 + 6 + 7 - (4+3+2)$
$= 9$ அலகுகள், முதல் மூன்று விசைகளுக்குரிய திசையில் இருக்கும்.

செயற்படும் இடம்:

$$\overline{x} = \frac{5\times1 + 6\times2 + 7\times3 - 4\times-1 - 3\times3 - 2\times5}{5+6+7-4-3-2}$$

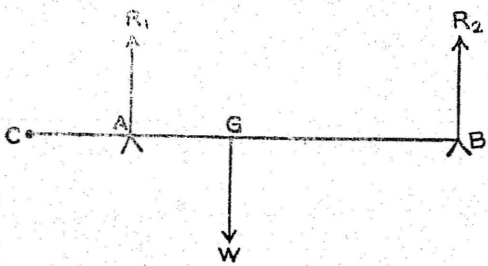
$$= \frac{23}{9}$$

$$\overline{y} = \frac{5\times1 + 6\times-2 + 7\times4 - 4\times3 - 3\times-2 - 2\times-1}{5+6+7-4-3-2}$$

$$= \frac{17}{9}$$

$\left(\dfrac{23}{9}, \dfrac{17}{9}\right)$ என்ற புள்ளியில் முதல் திசையில் செயற்படும் 9 அலகுள்ள விசை (கூட்டு) விளைவு விசையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2): 4 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு தூலம், மூன்று மீட்டர் இடைவெளியிலுள்ள இரு கம்பங்களின் மேல் கிடை நிலையில் அசைவற்று நிற்கிறது; ஒருபுறம் கம்பத்தைத் தாண்டி 1 மீட்டர் நீண்டிருக்கிறது. ஒரு தூணில் தாங்கப்படும் கனம் மற்றொரு தூண் தாங்கும் கனத்தைப்போல் இரு மடங்கென நிறுவுக.



படம் 5-4.2. (i).

[படம் 5-4.2 (i).] காண்க. *BC* என்பது தூலம். *G* அதன் மையம்; *G* வழியாக *W*—அதன் எடை, நிலைக்குத்தாக கீழே செயற்படுகிறது. $AC = 1$ மீட்டர் என்ற வகையில் அத்தூலம் *A*, *B* என்ற இரு தூண்களின் மேல் நிற்கிறது. $CG = 2 = GB$. *A*, *B* மேல் அத்தூலம் இருப்பதால் *A*-ல் ஓர் எதிர் (வினை) விசை R_1—ம் *B*-ல் ஓர் எதிர் (வினை) விசை R_2-ம் உள் விசைகளாகச் செயற்படுகின்றன. R_1, R_2, W என்ற மூன்று விசைகள் ஒருங்கே செயற்படுவதில், அத்தூலம் அசைவற்ற நிலையில் உள்ளது.

எனவே, R_1, R_2—ன் (கூட்டு) விளைவு விசை *G* என்ற இடத்தில் நிலைக்குத்தாக மேலே செயற்பட்டு அதன் அளவு *W* ஆக இருந்தால்தான் அசைவற்ற நிலை முடியும்.

$$R_1 + R_2 = W$$
$$R_1 . AG = R_2 . GB$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒருங்கே உண்மையாக வேண்டும். $AG = 1$ மீட்டர்; $GB = 2$ மீட்டர்.

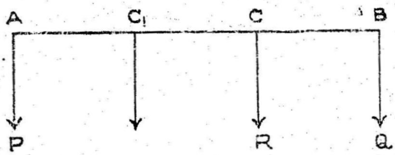
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{GB}{AG} = \frac{2}{1}\Bigg\}$$

$\therefore R_1 = 2R_2$.

வினையும், எதிர்வினையும் சமமாதலின், *A* என்ற தூண் தாங்கும் கனம், R_1-க்குச்சமம்; *B*-என்ற தூண் தாங்கும் கனம், R_2-க்குச் சமம்.

$\therefore$ A தாங்கும் பளு : B தாங்கும் பளு $= R_1 : R_2 = 2 : 1$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு (3) : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் இரு புள்ளிகளில் P, Q என்ற இரு இணை விசைகள் ஒரே திசையில் செயற்படுகின்றன. இவ்விரு விசைகளை இடம் மாற்றினால் அவற்றின் கூட்டு விளைவு விசை எந்த நேர்கோட்டில் செயற்படுமோ, அதே நேர்கோட்டில், Q-க்குப் பதிலாக $\frac{P^2}{Q}$ செயற்பட்டால் பெறப்படும் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படுமென நிறுவுக. [படம் 5-4.2. (ii)] காண்க.



படம் **5-4.2** (ii)

P, Q என்ற இரு இணைவிசைகள் A, B-ல் செயற்பட்டால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை C என்ற இடத்தில் செயற்படுமானால், $\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$ ....(1)

P, Q ஐ இடம் மாற்றினால் அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{P}{Q}$ என்ற வகையில்

C_1-ல் செயற்படும். ....(2)

P, $\frac{P^2}{Q}$ என்ற இரு இணைவிசைகள் செயற்படும் புள்ளி

C_2 எனில், $\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{P^2}{Q.P} = \frac{P}{Q}$ .... (3)

(2), (3) ஐ ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், C_1, C_2 இரண்டும் ஒரே புள்ளியெனத் தெரிகிறது. எனவே, நிறுவவேண்டியது நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 5

1. 5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு தண்ட வாளத்தின் முனைகள் இரு முளைக் குச்சிகளின் மேல் அசைவற்று நிற்கின்றன. அதன் எடை 10. கி. கிராம்; புவியீர்ப்பு மையம் ஒரு முனையிலிருந்து

2 மீட்டர் தூரத்திலிருக்குமானால், ஒவ்வொரு முளைக் குச்சியின் மேலுள்ள அழுத்தமென்ன?

2. AB என்ற ஒரு மீட்டர் நீளமுள்ள பலகை A என்ற முனை ஒரு முளைக் குச்சியின் மேலும், B என்ற முனையிலிருந்து 20 செ.மீ. தூரத்திலுள்ள மற்றொரு முளைக் குச்சிமேலும் அசைவற்று நிற்கிறது. பலகையின் எடை 50 கி.கிராம். A-லிருந்து 20 செ. மீ. தூரத்தில் 70 கி.கிராம் எடை ஒன்று வைக்கப்படுமானால், இரு முளைக் குச்சிகளின் மேலுள்ள அழுத்தமென்ன?

3. 48 கி. கிராம் எடையும் 2 மீட்டர் நீளமுமுள்ள ஒரு சீரான தூலம், 75 செ. மீ. இடைவெளியிலுள்ள இரு முளைக் குச்சிகளின்மேல் நிற்கிறது. A என்ற முனைக்கும் அதற்கண்மையிலுள்ள முதல் முளைக் குச்சிக்குமுள்ள தூரம் 50 செ.மீ. 48 கி. கிராம் எடையொன்று அப்பலகையின் மேல் எங்கு வைக்கப்பட்டால், இரு முளைக் குச்சிகளின் மேலும் உள்ள அழுத்தங்கள் சமமாக இருக்கும்?

4. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் முறையே $P, P, 2P$ என்ற அளவுள்ள இணை விசைகள் ஒரே திசையில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை, C உடன் AB-ன் மையத்தைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மையம் வழியாகச் செல்கிறதென நிறுவுக.

5. சென்ற கணக்கில் அம் மூன்று விசைகளும் சமமாயிருப்பின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி வழியாகச் செல்கிறதென நிறுவுக.

6. நான்கு சமமான இணை விசைகள், ஒரே போகாக சதுர முனைகள் வழியாகச் செயற்படுமாயின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை, சதுரமையம் வழியாகச் செல்கிறதென நிறுவுக.

7. P, Q என்பவை இரு இணை விசைகள், ஒரே திசையில் A, B என்ற இரு புள்ளிகளில் செயற்படுகின்றன. Q என்ற விசை தன் திசைக்கு இணையாகவே a அளவு தூரம் நகர்த்தப்படுமானால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை தனக்கு இணையாக $\dfrac{Q^a}{P+Q}$ அளவு தூரம் நகருமென நிறுவுக.

8. ABC என்ற முக்கோண முனைகளில், முக்கோண தளத்திற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் P, Q, R என்ற இணை

விசைகள் ஒரே திசையில் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் (கூட்டு விளைவு விசை,

(i) உள்வட்ட மையம் வழியாகச் சென்றால்,
$P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ எனவும்,

(ii) மைய வெட்டிச் சந்தி வழியாகச் சென்றால்,
$P = Q = R$ எனவும்,

(iii) குத்துக் கோட்டு மையம் வழியாகச் சென்றால்,
$P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$ எனவும்,

(iv) வெளி வட்ட மையம் வழியாகச் சென்றால்,
$P : Q : R = a \cos A : b \cos B : c \cos C$ எனவும் நிறுவுக.

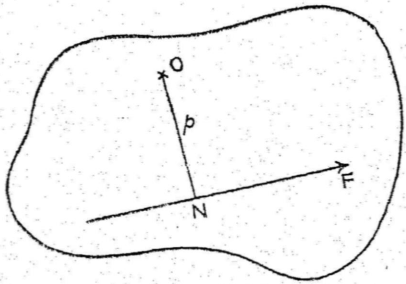
9. இரு வெவ்வேறு இணை விசைகள் P, Q $(P > Q)$ எதிரெதிர்த் திசைகளில் A, B என்ற புள்ளிகளில் இயங்குகின்றன. இவ்விரு விசைகளை ஒன்றுக் கொன்று திசைமாறுமல் இடம் மாற்றி இயங்கச் செய்தால், புது (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடம், முதலிடத்திலிருந்து $\dfrac{P+Q}{P-Q}$ AB தூரம் நகர்ந்துபோகுமென நிறுவுக.

6. விசையின் திருப்புத்திறன்

(Moment of a force)

6.1. விசையின் திருப்புத்திறன் : வரையறை :

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு விசை செயற்படும் கோட்டிற்கு வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும், விசையின் அளவையும் பெருக்கி வரும் தொகை, அப்புள்ளியை யொட்டி அவ்விசையின் திருப்புத் திறனின் அளவு என்பது வரையறை.



படம் 6-1.

(படம் 6-1) -ல் F என்ற விசை செயற்படும் கோட்டிற்கு O-லிருந்து ON என்ற குத்துக் கோடு வரையப்பட்டிருக்கிறது; ON-ன் நீளம் p. O என்ற புள்ளியை யொட்டி, F என்ற விசையின் திருப்புத் திறன் $F \times p$ என்பது வரையறை. எனவே, ஒரு புள்ளியை யொட்டி, ஒரு விசையின் திறப்புத் திறன், புள்ளியின் இடத்தையும், விசையின் திசை, அளவையும் சார்ந்திருக்கிறது. F என்ற விசை ஒரு குறிப்பிட்ட அளவில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் செயற்படின், O என்ற புள்ளி தூரச் செல்லச் செல்ல,

திருப்புத் திறன் உயர்கிறது; O நெருங்க நெருங்க, திருப்புத் திறன் குறைகிறது. O என்ற புள்ளி F செயற்படும் கோட்டிலேயே இருந்து விட்டால் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகிறது.

மாருக, O என்ற புள்ளியை நிலைக்க வைத்து F–ன் அளவையும், திசையையும் மாற்றிஞல் திருப்புத் திறன் மாறுகிறது. Fன் திசை O வழியாகச் செல்லுமாஞல், F-ன் அளவு எவ்வளவு விருந்த போதிலும் திருப்புத் திறன் பூச்சியம்தான். மேலும், ஒரு புள்ளியை யொட்டி, ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாஞல், இரண்டிலொன்று உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

(i) விசை O வழியாகச் செல்ல வேண்டும். **அல்லது**

(ii) விசையே பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

6-1·1. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை யொட்டி, ஒரு குறிப்பிட்ட விசையின் திருப்புத்திறன்-அதன் இயற்பியல் பொருள் (Physical meaning)

(படம் 6-1)-ல் உள்ள பொருள் ஒரு மட்டமான தகடு எனக் கொள்வோம் (மொத்தம் அல்லது உயரம் மிகக் குறைவு). இது ஒரு மேசையின் மேல் அமைதி நிலையில் இருக்கட்டும். அத்தகட்டின் மேல் O என்ற புள்ளியை நிலைத்த புள்ளியாகக் கொள்வோம். அங்கே அத்தகட்டை நாம் செங்குத்தாக ஒரு விரலால் அழுத்திக் கொண்டு இடம் பெயராது வைத்துக் கொள்வோம். இப்போது ஒரு விசை F அத்தகட்டின் மேல் எங்காவது ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேர்கோட்டில் செயற்பட்டால், என்ன விளைவு ஏற்படுமென நாம் கற்பனை செய்து பார்க்கலாம்; நேரடியாகச் சோதனை செய்தும் பார்க்கலாம்.

என்னவாகுமெனில், பொதுவாக அத் தகடு Oஐ மையங் கொண்டு சுழல ஆரம்பிக்கும். சுழலச்சு O-ல் அழுத்திக் கொண்டிருக்கும் நமது விரல். O–ல் நாம்விரலால் அழுத்துவதற்குப் பதிலாக ஓர் ஆணியைத்தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அடித்து நிறுத்துவோம். பின்னர் F என்ற ஒரு விசை அத்தகட்டின் மேல் உள்ள எங்காவது ஒரு புள்ளியில் ஒரு நேர்கோட்டில் செயற்பட்டால், முன் விளக்கப்பட்ட சுழற்சியே விளையும் (தகட்டின் முனையில் ஒரு கயிறு கட்டி, தகட்டை இழுக்க முயற்சிக்கலாம்—இதுவே F என்ற விசையெனக் கொள்ளலாம்).

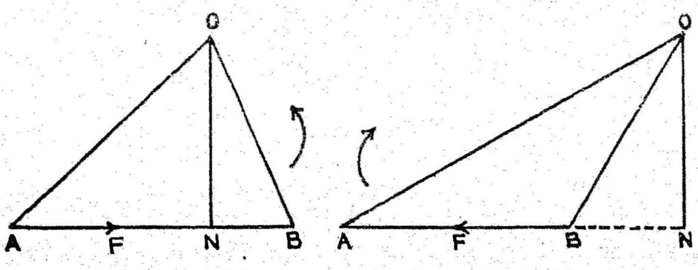
ஆஞல், F செயற்படும் நேர்கோடு O வழியாகச் செல்லுமாஞல், தகடு சுழலாது (அதன் விளைவாக விரலாலோ, ஆணியாலோ ஒரு அழுத்து விசை எதிர் வினையாகச் செயற்பட்டு

Fஐ செயலற்றதாக்கும். F பலமாகவிருந்தால், தகடு பிய்த்துக் கொண்டு வந்துவிடும். இது ஒரு தனிச் சிறப்பான விசை யாகுமே யொழிய, பொதுவாக மேற்கூறிய சுழற்சிதான் ஏற்படும்).

$F=0$ ஆனால் அசைவுமில்லை, சுழற்சியுமில்லை. எனவே, $F=0$ ஆனாலும் சரி, F செயற்படும் நேர்கோடு O வழியாகச் சென்றாலும் சரி, சுழற்சியில்லை. F செயற்படும் நேர்கோடு O வழியாகச் செல்லும் போது $ON=0$ என்பதைக் காண்கிறோம். எனவே, $F\times ON$ என்ற பெருக்குத் தொகை திருப்புத்திறனை அளக்கும் ஓர் இராசியாகக் கொள்ளலாமெனத் தெரிகிறது.

6-1·2. திருப்புத்திறன் — வடிவ கணித உருவமைப்பு

F என்ற ஒரு விசை AB என்ற கோட்டில் செயற்படட்டும். AB-ன் நீளம், ஒரு வசதியான அளவுச் சட்டப்படி F-ன் அளவைக் குறிக்கட்டும். O என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியையொட்டி, F-ன் திருப்புத்திறனைக் காண்போம். [படம் 6-1·2. (i), 6-1·2. (ii)]



படம் 6-1·2. (i) படம் 6-1·2. (ii)

படங்களில் OA, OB இணைக்கவும்; O-விருந்து AB-க்கு ON என்ற குத்துக்கோடு வரைக; அக் குத்துக்கோடு, ABஐ அல்லது AB-ன் நீட்டலை N-ல் சந்திக்கட்டும்.

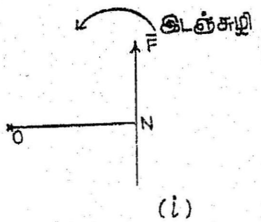
வரையறைப்படி, Oஐ ஒட்டி, F-ன் திருப்புத் திறன்

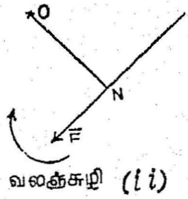
$$= ON \times F$$
$$= ON \times AB$$
$$= 2\,\triangle\, OAB \text{ (பரப்பு)}$$

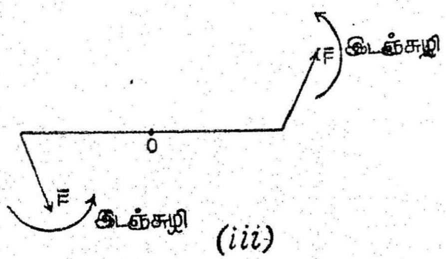
எனவே, பின்வரும் விதியை நாம் வரையறுக்கலாம். AB என்ற நேர்க்கோட்டால் F என்ற விசையை (அளவுச் சட்டப்படி) குறிப்பிட்டால் Oஐ ஒட்டி அவ் விசையின் திருப்புத்திறன் OAB என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பின் இரு மடங்கால் அளவிடப்படும். இது இரு படங்களுக்கும் பொருந்தும்.

6-1·3. திருப்புத்திறன் — கூட்டு மதிப்பு—குறை மதிபபு

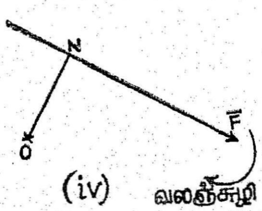
[படம் 6·13 (i)]-ல் Oஐ நிலை நிறுத்தி F என்ற விசை செயற்படுமாயின், அப்பொருள் Oஐ மையங் கொண்டு இடஞ்சுழியாகச் சுற்றுவதற்கு இடம் உண்டு என்பதைக் காணலாம். [படம் 6-1·3 (ii)]-ல் Oஐ நிலை நிறுத்தி F என்ற விசை செயற்படுமாயின், அப் பொருள் Oஐ மையங் கொண்டு வலஞ் சுழியாகச் சுற்றுவதற்கு இடம் உண்டு என்பதைக் காணலாம். பின்வரும் படங்களில் O நிலைத்த புள்ளி; செயற்படும் விசை F. ஆங்காங்கு இடஞ் சுழிச்சுழற்சியா அல்லது வலஞ்சுழிச் சுழற்சியா என்று குறிக்கப்பட்டிருப்பதைக் கண்டு பழகிக் கொள்க.

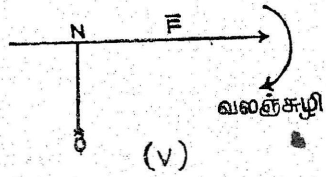






படம் 6-1·3. (i) படம் 6-1·3. (iii) படம் 6·1·3. (ii)





படம் 6-1·3 (iv) படம் 6-1·3. (v)

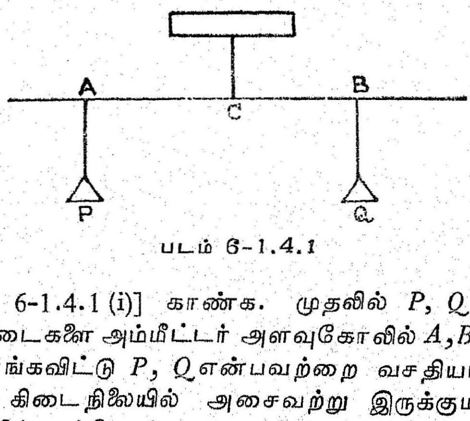
மரபாக இடஞ்சுழித் திருப்புத்திறனுக்குக் கூட்டு மதிப்பும், வலஞ்சுழித் திருப்புத்திறனுக்குக் குறை மதிப்பும் கொடுக்கப்

படுகிறது. மாருகக் கொள்வதில் தவறேது மேற்படாதாயினும், இந்நூல் முழுவதிலும் இம்மரபே கையாளப்படும்.

6-1.4. **சோதனை மூலம் பின்வரும் உண்மையை நாம் நிலைநாட்டலாம்**

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் ஏதாவதொரு புள்ளியில் நிலை நிறுத்தப்பட்டு மற்றும் இரண்டு விசைகள் அதன் மேல் செயற் படுவதால், அப்பொருள் அசைவற்ற நிலையில் இருப்பின், நிலை நிறுத்தப்பட்ட புள்ளியை யொட்டி அவ்விரு விசைகளின் திருப்புத்திறனும் சமமாக விருக்கும்; ஒரு திருப்புத்திறன் இடஞ் சுழியாகவும், மற்ருெரு திருப்புத்திறன் வலஞ்சுழியாகவும் இருக்கும்.

சோதனை முறை: ஒரு சீரான மீட்டர் அளவுகோலை, அதன் மையப்புள்ளியில் தொங்கவிடுக. அது கிடைக்கோட்டில் அசைவற்று நிற்கும். ஆனால் Cஐ மையங்கொண்டு, அது மேலும் கீழும் சுழல வழியிருக்கும்.

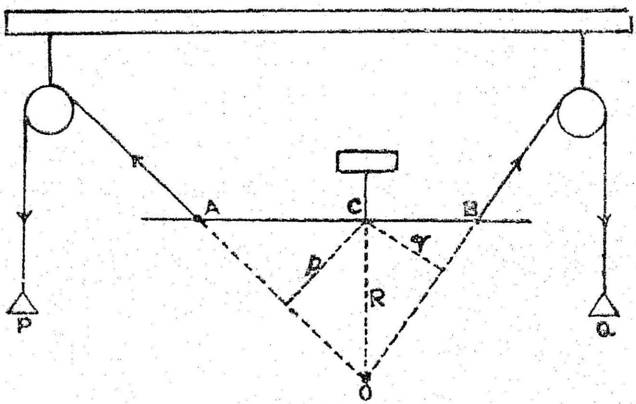


படம் 6-1.4.1

[படம் 6-1.4.1 (i)] காண்க. முதலில் P, Q என்ற இரு தெரிந்த எடைகளை அம்மீட்டர் அளவுகோலில் A, B என்ற இடங் களில் தொங்கவிட்டு P, Q என்பவற்றை வசதியாக நகர்த்தி, அக்கோல் கிடைநிலையில் அசைவற்று இருக்குமாறு செய்க. கிடைநிலையில் அக்கோல் அசைவற்றிருக்கும்போது $P.AC$ஐயும், $Q.CB$ ஐயும் காண்க. அவை சமமாயிருப்பதைக் காணலாம். $P.AC$ என்ற திருப்புத்திறன் Cஐ ஒட்டி ↺ இடஞ்சுழியாகவும், $Q.CB$ என்ற திருப்புத்திறன் ↻ வலஞ்சுழியாகவும் இருப்பதைக் காண்க. எனவே, சோதனைப்படி இரு இணைவிசைகளுக்கு முதற்கூறிய உண்மை பொருந்துவதைக் காண்க.

இருவிசைகளும் இணைவிசைகளாயில்லாது போயினும், அவ்வுண்மை பொருந்துவதைக் காணலாம். சற்று சோதனை முறையை மாற்றவேண்டும். [படம் 6-1.4 (ii)] காண்க.

A-ல் ஒரு கயிறுகட்டி அதை ஓர் உருளை வழியாகச்செலுத்தி ஒரு தராசுத் தட்டைத் தொங்கவிடுக; அவ்வாறே *B*-லும் செய்க. தராசுத் தட்டுகளில் தகுந்தபடி எடைகள் வைத்து



படம் 6-1.4 (ii)

மீட்டர்கோலைக் கிடைநிலையில் நிறுத்துக. *A*-ல் கட்டப்பட்டுள்ள கயிற்றின் இழுவிசை *P* எனில், அது அங்குள்ள தராசுத் தட்டும் அதிலுள்ள எடையும் சேர்ந்த எடையாகும். அவ்வாறே *B*-ல் கட்டப்பட்டுள்ள கயிற்றின் இழுவிசை *Q* எனில், அது அங்குள்ள தராசுத்தட்டும் அதிலுள்ள எடையும் சேர்ந்த எடையாகும். *C*-லிருந்து *OA*, *OB*-ன் மேல் வரையப்படும் குத்துக் கோடுகளின் நீளம் முறையே *P*,*q* ஆனுல் $P.p=Q\cdot q$ என்ற சமன்பாடு உண்மையாவதைச் சோதனைப்படி காணலாம். $P.p$-ம், $Q\cdot q$-ம் எதிரெதிர் திருப்புத்திறன்களாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, முதலில் கூறப்பட்ட உண்மை எந்தவிதமான ஒரு தள விசை இரண்டிற்கும் பொருந்தும். இவ்வுண்மை பல கணக்குகளில் பயன்படும்.

6-2. வாரிக்னன் தேற்றம் (Varignon's Theorem)

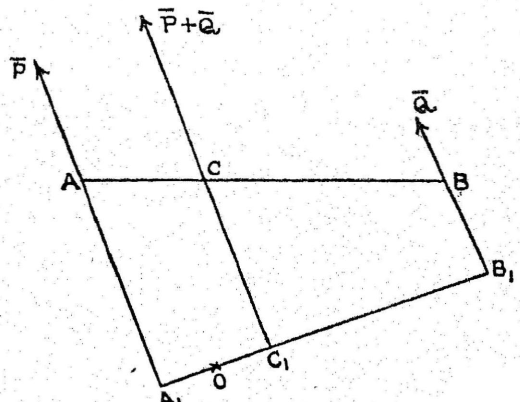
ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை யொட்டி, அப்புள்ளியுடன் ஒரே தளத்திலுள்ள இருவிசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை அதே புள்ளியை யொட்டி, அவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் (அவ்வாறு ஒரு விசையிருப்பின்) திருப்புத்திறனுக்குச் சமம். (The algebraic sum of the moments of two coplanar forces about a point in their plane is equal to the moment of their resultant, if any, about that point).

விளக்கம் : 'அவ்வாறு ஒரு விசையிருப்பின்' என்ற சொற்றொடரின் பொருளை முதலில் அறிந்து கொள்வோம்.

இரு சம நேரெதிர் இணை விசைகளிருப்பின், அவற்றிற்குக் (கூட்டு) விளைவு விசையில்லையெனவும், அவை சிறப்பாக 'இரட்டை' என்ற வகையில் பின்னர் விளக்கப்படுமெனவும் நாம் பகுதி 5-ல் கண்டோம். ஆகவே, இச்சொற்றொடர் மூலம் அத்தனிச் சிறப்பான இரு விசைகள் விலக்கப்பட்டன.

தெரிப்பு (i) : இணை விசைகளாக ஒரே திசையில் செயற்படும் இருவிசைகள் [படம் 6-2. (i)] காண்க.

[படம் 6-2. (i)]-ல் P, Q என்ற இரு இணைவிசைகள், ஒரே திசையில் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் A, B என்ற இடங்களில் செயற்படட்டும். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(P+Q)$ என்ற மற்றோர் இணைவிசை; செயற்படுமிடம் $\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$ என்ற வகையில் C என்ற புள்ளி. அத்திசைகளுள்ள தளத்தில் O என்ற ஏதாவதொரு புள்ளி கொள்க.



படம் 6-2 (i)

O வழியாக $A_1OC_1B_1$ என ஒரு நேர்கோடு அவ்விசைகளின் திசைக் கோடுகளுக்குக் குத்தாக வரைக. அக் குத்துக்கோடு $P, Q, (P+Q)$ என்ற விசைகள் செயற்படும் நேர்கோடுகளை முறையே A_1, B_1, C_1 என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும். 3-4.—ல் கண்ட விதிப்படி A, B, C-ல் செயற்படும் $P, Q, (P+Q)$ என்ற

விசைகள் A_1, B_1, C_1 என்ற புள்ளிகளில் செயற்படுவதாகக்கொண்டால், விளைவு மாருது.

மேலும் வடிவ கணிதப்படி,

$$\frac{Q}{P} = \frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1} \left(\because AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1 \right) \quad \dots (1)$$

Oஐ ஒட்டி P-ன் திருப்புத்திறன் $P.A_1O$ ↻ ......(2)

Q-ன் திருப்புத்திறன் $Q.OB_1$, ↺ ......(3)

$(P+Q)$-ன் திருப்புத்திறன் $(P+Q) \cdot OC_1$ ↺ ......(4)

திருப்புத்திறன் (2) வலஞ்சுழி; (3) இடஞ்சுழி.

6-1.3-ல் ஏற்கப்பட்ட மரபுப்படி இடஞ்சுழித் திருப்புத்திறன்கள் கூட்டு மதிப்புடையதெனவும், வலஞ்சுழித் திரும்புத்திறன்கள் குறை மதிப்புடையதெனவும் பொதுவாகக் கொள்ளப்படும்.

∴ P-ன் திருப்புத் திறன் — $P \cdot A_1O$ $(-)$

Q-ன் திருப்புத் திறன் — $Q \cdot OB_1$ $(+)$

∴ இவ்விரு விசைகளின் இயற் கணித கூட்டுத் திறப்புத்

திறன் $= -P \cdot A_1O + Q \cdot OB_1$ ...(5)

$= -P(A_1C_1 - OC_1) + Q \cdot (OC_1 + C_1B_1)$

$= (P+Q)\, OC_1 + Q \cdot C_1B_1 - P \cdot A_1C_1$ ...(6)

ஆனால் (i)-ன் படி $Q \cdot C_1B_1 - P \cdot A_1C_1 = 0$

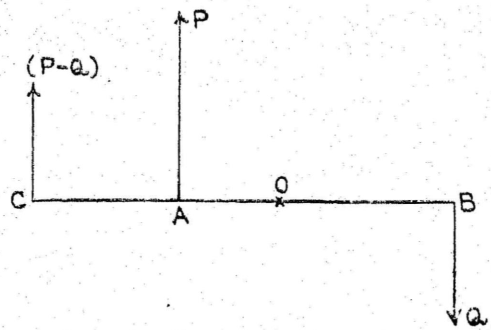
∴ இவ்விரு விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் (ஏதாவதொரு புள்ளி O ஐ ஒட்டி) $= (P+Q)\ OC_1\ (+)$ ... (7)

= (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் (O ஐ ஒட்டி). எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

(2) $P > Q$: P, Q என்ற இரு இணை விசைகள், நேரெதிர்த் திசைகளில் இரு புள்ளிகளில் செயற்படுகின்றன. இதை நிறுவும் வகையில், சென்ற பகுதியில் செய்த வரைவுகள் செய்ததாக ஏற்றுக் கொண்டு [படம் 6-2·(ii)]-ல் காட்டியபடி விசைகளைக் குறிப்பிடுவோம்.

விளக்கம் படத்தில் கண்டு கொள்க.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$ என்ற விகிதம் பொருத்தமாகும் ...(8)



படம் 6-2· (ii).

O ஐ ஒட்டி P-ன் திருப்புத்திறன் $P \cdot AO$ ↺ (—)

Q-ன் திருப்புத்திறன் $Q \cdot OB$ ↺ (—)

$(P-Q)$-ன் திருப்புத்திறன் $(P-Q)\ CO$ ↺ (—)

∴ முதலிரண்டு விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை

$$= -P \cdot AO - Q \cdot OB$$
$$= -P\,(CO-CA) - Q\,(CB-CO)$$
$$= (-P+Q)\,CO + P \cdot CA - Q \cdot CB$$
$$= -(P-Q)\,CO + P \cdot CA - Q \cdot CB$$

ஆனால் (8)-ன்படி $P \cdot CA - Q \cdot CB = 0$

∴ இவ்விரு விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் ஏதாவதொரு புள்ளி 0 ஐ ஒட்டி)

$$= -(P-Q)\,CO$$

= (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் (குறை மதிப்புடையது)

எனவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

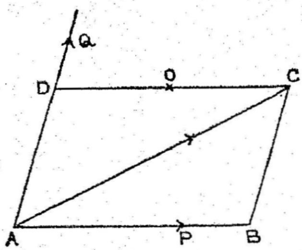
குறிப்பு: தேற்ற முதற் பகுதியிலும் இரண்டாம் பகுதியிலும் O என்ற புள்ளியை எங்கு வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்

கொள்ளலாம்; கவனத்திலிருக்க வேண்டியது திருப்புத்திறன் கூட்டுக் குறியுடையதா (↺) அல்லது குறைக்குறியுடையதா (↻) என்பது மட்டுமே.

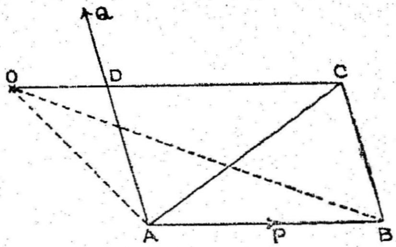
(3) செயற்படும் இரு விசைகள் இணை விசைகளல்லாமல் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு [படம் 6–2. (iii), (iv)-ல்] காட்டப்பட்டபடி பின்வரும் இரண்டு சூழ்நிலைகள் ஏற்படலாம்:

(i) O என்ற புள்ளி P, Q செயற்படும் கோடுகளாலான கோணத்திற் கிடைப்பட்டிருப்பது [படம் 6-2· (iii).]

(ii) கோணத்திற்கு வெளியே அமைவது [படம் 6–2·(iv)]



படம் 6-2·(iii).



படம் 6-2·(iv)

(i) O வழியாக AB-க்கு இணைகோடாக OD என்ற கோடு வரைக. [படம் 6-2· (iii).] AD என்ற நீளம் Q என்ற விசையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், நமக்கு ஒரு அளவுச் சட்டம் கிடைக்கும். அந்த அளவுச் சட்டப்படி AB என்பது P-ஐக் குறிக்கட்டும். $ABCD$ என்ற இணைகரம் வரைந்தால் $\bar{P} + \bar{Q} = \overline{AC}$ எனக் கிடைக்கும். இப்போது Oஐ ஒட்டி திருப்புத் திறன்கள் காண்போம். முன்னர் 6–1·2.-ல் விளக்கப்பட்டபடி,

P-ன் திருப்புத்திறன் $= 2\triangle AOB$ (இடஞ்சுழி+)

$= 2\triangle ACB$ } வடிவ கணிதம்
$= 2\triangle ABD$ }

Q-ன் திறப்புத்திறன் $= 2\triangle AOD$ (வலஞ்சுழி−)

எனவே, P, Q இரண்டின் திருப்புத் திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை $= 2\triangle ACD - 2\triangle AOD$

$= 2\triangle AOC$

$= \overline{AC}$-ன் திருப்புத் திறன் (இடஞ்சுழி+)

$=$ Oஐ ஒட்டி இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத் திறன்.

(ii) [படம் 6-2· (iv)] காண்க.

செய்முறை (iii)-ல் உள்ளபடியே கொள்க.

Oஐ ஒட்டி P-ன் திருப்புத் திறன் $= 2 \triangle AOB$ (இடஞ்சுழி+)

$= 2 \triangle ACB$
$= 2 \triangle ACD$ } (வடிவ கணிதம்)

Q-ன் திருப்புத்திறன் $= 2 \triangle AOD$ (இடஞ்சுழி+)

எனவே P, Q இரண்டின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை $= 2 \triangle ACD + 2 \triangle AOD$

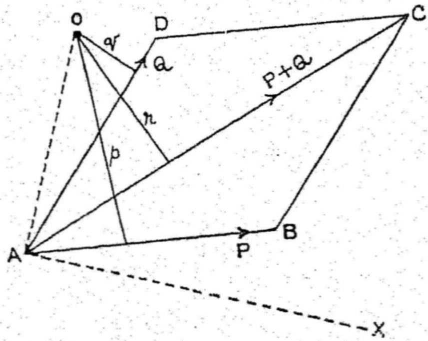
$= 2 \triangle AOC$

$= \overline{AC}$-ன் திருப்புத்திறன் (இடஞ்சுழி +)

$= O$ஐ ஒட்டி இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத் திறன்.

எனவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் இரு ஒத்த இணை விசைகளோ, எதிரெதிர் இணை விசைகளோ (சமமானவை விலக்கு) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கக்கூடிய இரு விசைகளோ, O என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிருக்கும் தளத்தில் செயற்படுமாயின், அப் புள்ளியை யொட்டி அவ்விரு விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகையும், அவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனும் சமம்.

6-2·1. **மாற்றுத் தெரிப்பு :** இரு விசைகள் A என்ற இடத்



படம் 6-2·1.

தில் சந்திக்குமானல் பின்வரும் மாற்று முறைப்படியும், வாரிக்கை நிறுவலாம். (படம் 6-2·1) காண்க.

OAஐ இணைத்து A வழியாக $AX \perp AO$ என வரைக.
$\angle XAB = \theta_1$ எனவும்
$\angle XAD = \theta_2$ எனவும்
$\angle XAC = \theta$ எனவும் கொள்க.

O-லிருந்து AB, AD, AC-க்குக் குத்துக்கோடுகள் வரைக; அக் குத்துக்கோடுகளின் நீளம் முறையே p, q, r எனக் கொள்க. $AO = l$ எனக் கொள்க. Oஐ ஒட்டி,

$$\begin{aligned} P\text{-யின் திருப்புத் திறன்} &= P\cdot p \\ &= P\cdot AO \sin(90-\theta_1) \\ &= P\cdot AO \cos\theta_1 \\ &= P\cos\theta_1\, AO \\ &= l\cdot(AX\text{-ன் மேல் } P\text{-ன் பிரித்த பகுதி} \quad \ldots\ldots(1) \end{aligned}$$

Q-ன் திருப்புத்திறன் $= l\cdot(AX$-ன் மேல் Q-ன் பிரித்த பகுதி ...(2)
(கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் $= l$. [AX-ன் மேல் (கூட்டு) விளைவு விசையின் பிரித்த பகுதி] ...(3)

ஆனால், 4-7.2-ன் படி. AX-ன் மேல் P, Q என்பவற்றின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கூட்டுத்தொகை = AX-ன் மேல் அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் பிரித்த பகுதி என நாம் அறிவோம்.

$$\therefore (3) = (1) + (2)$$

அதாவது $P \times p + Q \times q =$ (கூட்டு) விளைவு விசை $\times r$.

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு: (கூட்டு) விளைவு விசை செயல்படும் கோட்டின் மேல் O என்ற புள்ளி இருக்குமானால், Oஐ ஒட்டி (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும்; எனவே, முன்னேற்றப்படி Oஐ ஒட்டி அவ்விரு விசைகளின் திருப்பத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். எனவே, **இரு விசைகளின்** (கூட்டு) **விளைவு விசை செயற்படும் நேர்கோட்டின் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியைக் கொண்டு அப்புள்ளியையொட்டி அவ்விரு விசைகளது திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை கண்டால், அது பூச்சியமாகும்.**

6–3. திருப்புத்திறன்களின் பொதுத்தேற்றம்

மேலே கூறப்பட்ட வாரிக்னன் தேற்றத்தைப் பல **விசை**களுக்கு விரிவு படுத்தினால், பின்வரும் **திருப்புத்திறன்களின் பொதுத்தேற்றம்** பெறலாம்:

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தமையும் பல விசைகள் செயற்பட்டு அவ்விசைகளுக்கு ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை இருக்குமானால், அத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியையொட்டி, அப்பல விசைகளது திருப்புத்திறன் களின் இயற்கூட்டுத் தொகையும், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறனும் சமம்.

திரும்பத்திரும்ப வாரிக்னன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால், இத்தேற்றம் பெறப்படும்.

குறிப்பு (1) : 'அவ்விசைகளுக்கு ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை இருக்குமானால்' என்ற சொற்றொடரின் பொருளை நாம் கண்டு கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில், (கூட்டு) விளைவுவிசையைக் காணும்போது கடைசியாக நேரெதிர்த்திசைகளில் இரு சமமான இணை விசைகளில் வந்து, நம் முயற்சி நின்றுவிட இடமுண்டு. அந்த நிலையில் இவ்விரு விசைகளுக்கும் (கூட்டு) விளைவு விசை காண இயலாது; அவை முன்னர் 6-2 ல் கூறியபடி ஒரு சிறப்பான விசை அமைப்பான 'இரட்டை' யின் பாற்படும். எனவே, தேற்றத்தில் அச்சொற்றொடர் இன்றியமையாததாய் நிற்கிறது.

6-3.1. **கிளைத்தேற்றம்: பல விசைகளது (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் கோட்டின் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியைக் கொண்டால், அப்புள்ளியை யொட்டி, அப்பல விசைகளது திருப்புத்திறன்களின் இயற்கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகிறது.** இதை நாம் அறிவோம் (6-1. காண்க).

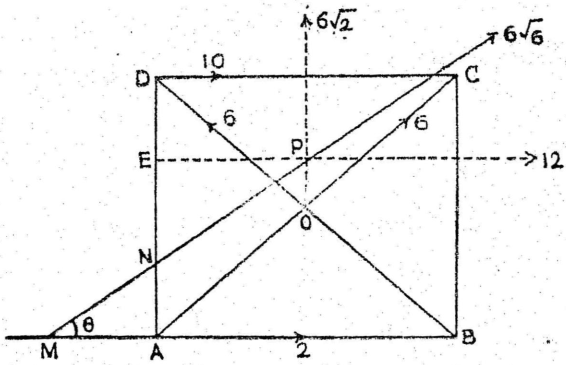
6-3.2 எனவே, இதன் மறுதலையாக, **ஒரு தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியை யொட்டி, அத்தளத்தின் மேல் செயற்படும் பல விசைகளது திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமானால்**

(i) **(கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாக வேண்டும் அல்லது (ii) அப்புள்ளியானது (கூட்டு) விளைவுவிசை செயற்படும் நேர்கோட்டின் மேலிருக்க வேண்டும்.**

முதல் நிலையில் அதாவது (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமானால், அத்தளத்தமை விசைகள் அக்கட்டிறுக்கப் பொருளை அசைவற்ற நிலையில் வைத்திருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. இரண்டாவது நிலையில் நாம் இத்தேற்ற உதவி கொண்டு (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் கோட்டினைக் காண இயலும்.

ஏனெனில், திருப்புத்திறன்களது இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சிய மாகக் கூடிய இருபுள்ளிகள் கண்டால் போதுமானது; அப் புள்ளிகள் வழியாகக் (கூட்டு) விளைவு விசை செல்லும்.

6–4. **எடுத்துக்காட்டு** (1): 2, 10, 6, 6 கி. கிராம் எடைகள் அளவுள்ள விசைகள் $ABCD$ என்ற ஒரு சம சதுரத்தில் AB, DC, AC, BD என்ற கோடுகளில் அந்தந்த திசைகளில் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காண்க.



படம் 6–4. (i).

[படம் 6-4. (i)]–ல் சதுரத்தின் பக்கம a மீ: எனக் கொள்க. AB, DC என்ற கோடுகளில் செயற்படும் ஒத்த இரு இணை விசை களின் (கூட்டு) விளைவு விசை 12 கி. கி. செயற்படுமிடம்

$\frac{DE}{EA} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ என்ற விகிதத்திற்கொப்ப E-ல் செயற்படும்.

$$\therefore\ DE = \frac{a}{6}$$

AC, BD–ல் சம விசைகள் செயற்படுவதால், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\angle COD$ ஐ சமக் கூருக்கும் கோட்டில் செயற்படும்; அளவு $\sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$ கி.கி. எனவே, P என்ற புள்ளியில் AB–க்கு இணை கோட்டில் 12 கி. கிராமும், AD–க்கு இணை கோட்டில் $6\sqrt{2}$ கி.கிராமும் செயற்படும். அவ் விசை களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் 90° ஆதலின்,

அவ்விரண்டு (கூட்டு) விளைவு விசை $= \sqrt{12^2 + (6\sqrt{2})^2}$

$$= \sqrt{216}$$
$$= 6\sqrt{6} \text{ கி.கிராம்.}$$

செயற்படும் கோடு, AB-க்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம்

$$\tan\theta = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ என்ற தொடர்பால் பெறப்படும்.

இக் கணக்கில் விசைகள் சீராக இருப்பதால், இம் முறையில் போட முடிந்தது. ஆனால், பொதுவாக இவ்விதக் கணக்குகளைப் போடும் முறை பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறதைக் காண்க. அது இவ்விதமான எல்லா கணக்குகளுக்கும் பொருந்தும். இவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசைக்கோடு BA-ன் நீட்டலை M-லும், ADஐ N-லும் வெட்டுகிறதாகக் கொண்டு M, N என்ற புள்ளிகளை இடங் குறிப்போம்.

$AM = x$ எனவும், $AN = y$ எனவும் கொள்வோம். (கூட்டு) விளைவு விசை M வழியாகச் செல்வதால் Mஐ ஒட்டி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களது இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்; அவ்வாறே N ஐ ஒட்டியும் பூச்சியமாகும்.

M ஐ ஒட்டித் திருப்புத்திறன்

$\overline{AB}$: 2 கி.கி.—திருப்புத்திறன் பூச்சியம்.

$\overline{DC}$: 10 கி.கி—திருப்புத்திறன் $= 10 \times a\ (-)$

$\overline{AC}$: 6 கி. கி—திருப்புத்திறன் $= 6 \times x \sin 45^\circ$

$$= \frac{6x}{\sqrt{2}}\ (+)$$

$\overline{BD}$: 6 கி. கி—திருப்புத்திறன்

$$= 6\,(a+x)\sin 45^\circ$$
$$= \frac{6\,(a+x)}{\sqrt{2}}\ (+)$$

$$\therefore\ \frac{6\,(a+x)}{\sqrt{2}} + \frac{6\,x}{\sqrt{2}} - 10\,a = 0$$

$$\frac{12\,x}{\sqrt{2}} = \left(10 - \frac{6}{\sqrt{2}}\right) a$$

$$12\,x = (10\sqrt{2} - 6)\,a$$

$$x = \left(\frac{10\sqrt{2}-6}{12}\right) a$$

$$= \left(\frac{5\sqrt{2}-3}{6}\right) a$$

இப்போது AD-ல் N வழியாகச் செல்கிறதெனக் கொண்டால், Nஐ ஒட்டி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களது இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

N ஐ ஒட்டித் திருப்புத்திறன்:

$\overline{AB}$: 2 கி.கிராம்—திருப்புத்திறன் $= 2y\ (+)$

$\overline{DC}$: 10 கி.கி. — திருப்புத்திறன் $= 10\ (a-y)\ (-)$

$\overline{AC}$: 6 கி. கி. — திருப்புத்திறன் $= 6y \sin 45^\circ$

$$= \frac{6y}{\sqrt{2}}\ (+)$$

$\overline{BD}$: 6 கி. கி. — திருப்புத்திறன் $= 6\ (a-y) \sin 45$

$$= \frac{6(a-y)}{\sqrt{2}}\ (+)$$

$$\therefore\quad 2y - 10\ (a-y) + \frac{6y}{\sqrt{2}} + \frac{6(a-y)}{\sqrt{2}} = 0$$

$$12y - 10a + \frac{6a}{\sqrt{2}} = 0$$

$$(12y-10a)\sqrt{2} + 6a = 0$$

$$12\sqrt{2}\,y = 10\,a\sqrt{2} - 6a$$

$$y = \frac{10\,a\sqrt{2}-6a}{12\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(5\sqrt{2}-3)}{6\sqrt{2}}a$$

$$= \frac{10-3\sqrt{2}}{12}a.$$

எனவே, $6\sqrt{6}$ கி. கிராம் எடையுள்ள (கூட்டு) விளைவு விசை BA-ன் நீட்டலில் $AM = \left(\frac{5\sqrt{2}-3}{6}\right)a$ எனப் பெறப்படும் M என்ற புள்ளி வழியாகவும், AD-ன் மேல் $AN = \left(\frac{10-3\sqrt{2}}{12}\right)a$ எனப் பெறப்படும் N என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்கிறது.

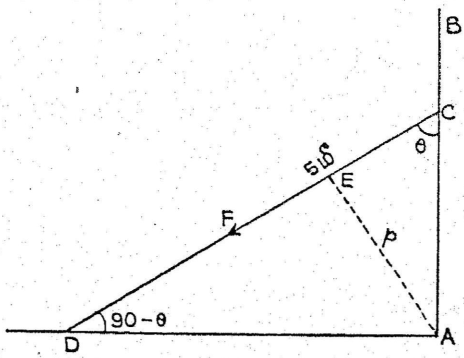
$$\tan\theta = \left(\frac{10-3\sqrt{2}}{12}\right)\left(\frac{6}{5\sqrt{2}-3}\right)$$

$$= \frac{(10-3\sqrt{2})\ (5\sqrt{2}+3)}{2\times 41}$$

$$= \frac{41\sqrt{2}}{41\times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\angle NMB = \theta$ என்பது படத்தில் காண்க.

எடுத்துக் காட்டு 2 : ஓர் உறுதியான கம்பம் நிலத்தில் செங்குத்தாகத் திடமாக நடப்பட்டிருக்கிறது. அக் கம்பத்தில் 5 மீட்டர் நீளம் உள்ள ஒரு கயிறு எந்த இடத்தில் கட்டப் பட்டால், அக் கயிற்றினை நில மட்டத்திலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட விசை F உடன் இழுத்தால் அக் கம்பத்தை வீழ்த்த மிக வசதி யாக இருக்குமென்பதைக் காண்க. (F-ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு, மாறிலி)



படம் 6-4. (ii).

[படம் 6-4. (ii)]-ல் AB கம்பம்; CD கயிறு; C கயிறு கட்டப் பட்டிருக்கும் இடம்; $AC=x$ எனக் கொள்க. $AE \perp CD$; $AE=p$ எனக்கொள்க. கயிற்றினை D-லிருந்து இழுத்தால், Aஐ ஒட்டி அக் கம்பம் சாயும். $\angle ACD=\theta$ எனக் கொள்க . Aஐ ஒட்டி அவ் விசையின் திருப்புத் திறனை $F\,p$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} F \times p &= F \times AD \sin(90-\theta) \\ &= F \times AD \cos\theta \\ &= F \times \frac{AD}{DC}\ DC\cos\theta \\ &= F \times DC \sin\theta\cos\theta \\ &= F \times 5\sin\theta\cos\theta \\ &= \tfrac{5}{2} F \sin 2\theta \end{aligned}$$

இதற்கு மீப்பெரு மதிப்பு $2\theta = 90$ அல்லது $\theta = 45^{\circ}$ என இருக்கும் போது கிடைக்கும்.

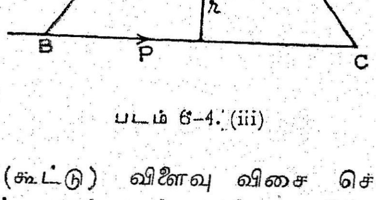
அப்போது $AC = 5 \cos \theta$

$$= 5 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

எனவே, கம்பத்தில் அடிமட்டத்திலிருந்து $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ மீட்டர் உயரத்தில் கயிற்றைக் கட்டியிழுத்தால், கம்பத்தை வீழ்த்த மிக்க வசதியாக இருக்கும்.

எடுத்துக் காட்டு (3) : மூன்று சம நீளமுள்ள கம்பிகளாலான ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, AC, BA வழியாக முறையே P, Q, R என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை BC-க்கு இணைகோட்டில் I (புவியீர்ப்பு மையம்) வழியாகச் செல்லுகிறதெனில், $Q = R = \frac{1}{2} P$ என நிறுவுக.

இது ஒரு சமபக்க முக்கோணத் தகடு அல்ல; எனவே, இதன் புவியீர்ப்பு மையம் மையக்கோட்டுச் சந்தி அல்ல (10-2·3.5. காண்க). இதன் புவியீர்ப்பு மையம் இம் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையத்திலமையும்; எனவேதான் I, புவி ஈர்ப்பு மையம் எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. [படம் 6-4·(iii)]



படம் 6-4. (iii)

I வழியாக (கூட்டு) விளைவு விசை செல்வதால், அப்புள்ளியை யொட்டி அம் மூன்று விசைகளின் திருப்புத்திறன்களது இயற்கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும். அதாவது,

$P \cdot r - Q \cdot r - R \cdot r = 0$ ஆகும். ...... (i)

இங்கு r—உள் வட்ட ஆரம். (கூட்டு) விளைவு விசையானது BC-க்கு இணைகோட்டில் செயற்படுவதால், BC-க்கு, குத்துக் கோட்டு திசையில் இம் மூன்று விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் கூடுதல் (இயல் முறை) பூச்சியமாகும்.

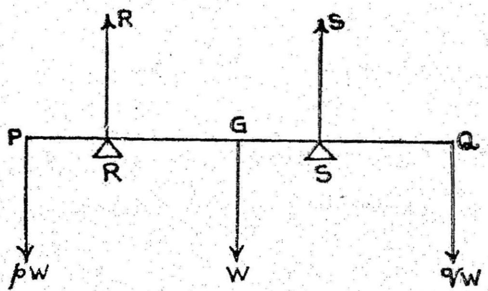
அதாவது $-Q \sin 60 + R \sin 60 = 0$

$\therefore \quad Q = R$ எனப் பெறப்படும்.

இதை (i)-ல் ஈடு செய்தால் $P = 2Q$ எனப் பெறலாம்.

$Q = R = \frac{1}{2} P$ என்பது நிறுவப்படும்.

எடுத்துக் காட்டு (4) : $2l$ நீளமுள்ள சீரான ஒரு கழியின் எடை w. அது R, S என்ற உயரத்திலுள்ள இரு முளைக் குச்சிகள் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. முளைக் குச்சிகளுக் கிடைப் பட்ட தூரம் l. P, Q என்ற அக் கழியின் இரு முனைகளிலும் pW, qW என்ற எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. R, S என்ற முளைக் குச்சிகளின் எதிர்விளைகள் சமமாயிருப்பின், PR-ன் நீளம் $\frac{l}{2}\left(\frac{1+3q-p}{1+q+p}\right)$ என நிறுவுக [படம் 6-4.(iv)].



படம் 6-4.(iv).

[படம் 6-4·(iv)-ல்] கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டவை காட்டப் பட்டிருக்கின்றன. R, S என்ற முளைகளில் எதிர் விளைகள் முறையே R, S எனக் கொள்க.

$RS = l$, $PQ = 2l$, $PR = x$ எனக் கொள்க. அப்போது $SQ = (l - x)$ ஆகும். கழி அசை வற்றிருப்பதால் (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாகும்; மேலும், எந்தப் புள்ளியை யொட்டி திருப்புத் திறன்கள் கண்டு அவற்றின் இயற் கூட்டுத்தொகை கண்டாலும் அதுவும் பூச்சியமாகும். எல்லா விசைகளும் இணை விசைகள்.

pW, W, qW — ஒரு திசை;

R, S — எதிர்த் திசை;

(கூட்டு) விளைவு விசை $= pW + W + qW - R - S = 0$

(அசைவற்ற நிலை காரணமாக)

எனவே, $R+S = W(1+p+q)$ ...(1)

என்பது சமன்பாடு அல்லது கட்டுப்பாடு.

R என்ற முனைக் குச்சியை யொட்டி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை உரிய குறிகளோடு கூட்டினால் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$\therefore \quad pWx - W(l-x) + S.l - qW(2l-x) = 0$ ...(2)

R, S என்பவை சமமாயிருக்கின்றன வென்ற கட்டுப்பாட்டைக் கொண்டு $R = S$ என ஈடு செய்து (1), (2) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து x காணலாம்.

(1)-லிருந்து $2S = W(1+p+q)$

$$S = \frac{W}{2}(1+p+q)$$

இந்த S மதிப்பை (2)-ல் ஈடு செய்தால்

$$pWx - W(l-x) + \frac{W}{2}(1+p+q)\,l - qW(2l-x) = 0$$

இதிலிருந்து x-ன் மதிப்பு $= \frac{l}{2}\left(\frac{1+3q-p}{1+p+q}\right)$

அதாவது, $PR = \frac{l}{2}\left(\frac{1+3q-p}{1+p+q}\right)$ எனப் பெறப்படும்.

பயிற்சி 6 (a)

1. 2 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓர் இரும்புக் கம்பி (எடை 9 கி. கிராம்) அதன் இரு முனைகளிலும் 6 கி. கிராம், 12 கி. கிராம் எடைகள் தாங்கி கிடைக் கோட்டில் அசைவற்று இருக்க வேண்டுமானால், எந்த இடத்தில் அதை ஒரு கயிறு கட்டித் தொங்க விடலாம்?

2. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் AB; B-ல் BP, BQ என்ற இரு நாண்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. Aஐ ஒட்டி BP, BQ என்ற கோடுகளால் அளவுபடுத்திய விசைகள் இரண்டும் சமமான திருப்புத் திறன்கள் பெற்றவையென நிறுவுக.

3. இரு குறிப்பிட்ட ஒரு தளத்தமைந்த விசைகள் முழுவதும் $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு புள்ளியை யொட்டி, அவ்விரு விசைகளுக்கும் ஒரே திசையில் சமமான திருப்புத் திறன்கள் இருக்குமாயின், அப்புள்ளியின் இயங்கு வழி காண்க.

4. மூன்று விசைகள் $\bar{P}$. $\bar{Q}$, $\bar{R}$ என்பவை செயற்படும் கோடுகள் முறையே BC, CA, AB என்ற ஒரு முக்கோணத் தகட்டின் பக்கங்களாகும். அவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை (i) உள் வட்ட மையத்தின் வழியாகச் செல்லுமாயின், $\bar{P}+\bar{Q}+\bar{R}=0$.

(ii) அத் தகட்டின் மையக் கோட்டு வழியாகச் செல்லுமாயின், $\frac{1}{\sin A}\bar{P}+\frac{1}{\sin B}\bar{Q}+\frac{1}{\sin C}\bar{R}=0$

(iii) குத்துக் கோட்டு மையத்தின் வழியாகச் செல்லுமாயின், $\frac{1}{\cos A}\bar{P}+\frac{1}{\cos B}\bar{Q}+\frac{1}{\cos C}\bar{R}+0$

(iv) சுற்று வட்ட மையம் வழியாகச் செல்லுமாயின் $\bar{P}\cos A+\bar{Q}\cos B+\bar{R}\cos C=0$ என நிறுவுக.

5. மேற்கூறிய கணக்கில் ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டில், S சுற்று வட்ட மையம்; I உள்வட்ட மையம்; 0 குத்துக் கோட்டு மையம்; G புவியீர்ப்பு மையம்; P, Q, R-ன் (கூட்டு) விளைவு விசை.

(i) $GO\rightarrow$ என்ற கோட்டில் செயற்படுமாயின்,

$$\frac{P}{\sin 2A\sin(B-C)}=\frac{Q}{\sin 2B\sin(C-A)}=\frac{R}{\sin 2C\sin(A-B)}$$

எனவும்,

(ii) $OS\rightarrow$ என்ற கோட்டில் செயற்படுமாயின்,

$$\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A}=\frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B}=\frac{R}{(a^2-b^2)\cos C}$$

எனவும்,

(iii) $IS\rightarrow$ என்ற கோட்டில் செயற்படுமாயின்,

$$\frac{P}{\cos B-\cos C}=\frac{Q}{\cos C-\cos A}=\frac{R}{\cos A-\cos B}$$

எனவும் நிறுவுக.

(P, Q, R என்பவை அளவில் மட்டும் கொள்ளப்படுகின்றன.)

6. CA, AB, BC என்ற முக்கோணப் பக்கங்களின் மேல் முறையே P, Q, $(P+Q)$ என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை ஒரு நிலைத்த புள்ளியின் வழியாகச் செல்லுகிறதென நிறுவுக.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் செயற்படும் எந்த மூன்று விசைகளும் அசைவற்ற நிலை தராதென நிறுவுக.

8. ஒரு சம சதுரத்தின் பக்கங்களின் மேல் செயற்படும் நான்கு விசைகள், எல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருந்தாலொழிய அசைவற்ற நிலை தராதென நிறுவுக.

9. ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் மேல் செயற்படும் விசைகள் அசைவற்ற நிலை தருமாயின், ஒவ்வொரு விசையும் அதன் எதிர்ப்பக்கத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

10. இரு நிலைத்த புள்ளிகள் A, B குறிக்கப்பட்டுள்ளன அப் புள்ளிகளை யொட்டி ஓர் அளவுள்ள விசையின் திருப்புத் திறன்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன; அவ்விசை செயற்படக் கூடிய கோடுகளைக் காண்பதெப்படி ? (வ. க.)

(குறிப்பு : F என்பது விசையளவு.
Aஐ யொட்டிய திருப்புத் திறன் m_1
Bஐ யொட்டிய திருப்புத் திறன் m_2

A-லிருந்து குத்து தூரம் $\frac{m_1}{F} = r_1$

B-லிருந்து குத்து தூரம் $\frac{m_2}{F} = r_2$

A மையங் கொண்டு r_1 ஆரங் கொண்ட ஒரு வட்டமும், B மையங் கொண்டு r_2 ஆரங் கொண்ட வட்டமும் வரைந்து அவ் வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகள் காண்க.)

11. AB, BC, CA என்ற ஒரு சம பக்க முக்கோணப் பக்கங்களின் மேல் P, $2P$, $4P$ என்ற அளவுடைய விசைகள் செயற்படின் அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையின் முழு விவரங்களையும் காண்க. (ப. க)

12. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம்; $CD : AC = 3 : 5$; விசைகள் 3, 5, 5 கி. கிராம் AB, AC, DB வழியாகச் செயற்படுகின்றன;

(கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் கோடு AB-க்கு இணை கோடாக இருக்குமென நிறுவுக. அதன் அளவையும், செயற் படும் இடத்தையும் காண்க.

13. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு கழி, எடை W, a அளவு இடை வெளியில் இருக்கும் இரு முனைக் குச்சிகளின் மேல் நிற்கிறது. கழியின் அசைவு நிலை மாருமல், இரு முனைகளில் W_1, W_2 என்ற எடைகளுக்கு மேற்பட்ட எடைகள் வைக்க முடியாதெனில்,
$$\frac{W_1}{W+W_1} + \frac{W_2}{W+W_2} = \frac{a}{l}$$ என நிறுவுக.

14. ABC என்ற முக்கோணத் தகடு A, B, C என்ற புள்ளி களை யொட்டி F என்ற விசையின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகையானது அத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தை யொட்டிய திருப்புத்திறனுக்குச் சமமென நிறுவுக.

15. 5 செ. மீ. பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத் தின் பக்கங்களின் மேல் P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, $6P$ என்ற அள வுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை ஒரே ஒரு விசையென நிறுவி, அதன் முழு விவரங் களையும் பெறுக.

16. ABC ஒரு முக்கோணம்; BG–க்குச் செங்குத்தாக A–ல் P என்ற விசையும், அதே மாதிரி மற்ற பக்கங்கள், முனைகளை யொட்டி, Q, R என்ற விசைகளும் செயற்படுகின்றன. இவற் றின் (கூட்டு) விளைவு விசை சுற்று வட்ட மையம் வழியாகச் சென்றால், $\sum P\,(c\cos B - b\cos C) = 0$ என நிறுவுக.

6–5. ஓர் அச்சை யொட்டிய திருப்புத்திறன்

இதுவரை ஒரு தளத்தமைந்த விசைகளையும், ஒரு புள்ளியை யொட்டிய திருப்புத்திறன்களையும் பார்த்தோம். ஒரு நிலைக் காலில் பதிக்கப்பட்ட கதவை எடுத்துக் கொண்டால், அதன் கீலை அச்சாகக் கொண்டு அக்கதவைத் திறக்க முடிகிறது; மூடமுடிகிறது; அதாவது, அக்கீலை அச்சாகக் கொண்டு அக் கதவு சுழல்கிறது. கீலுக்கு மிகத் தொலைவிலுள்ள கதவின் ஓரத்தில் நாம் அக்கதவை சிறுவிசை கொண்டு தள்ளினால், மூடி யிருக்கும் கதவு திறக்கப்படுகிறது; திறந்திருக்கும் கதவு மூடப் படுகிறது. அவ்வோரத்தை விட்டுக் கீலுக்கு அருகில் நெருங்க நெருங்க நாம் கதவைத் திறப்பதற்கோ மூடுவதற்கோ, தள்ளு விசையை அதிகப்படுத்த வேண்டியிருப்பதை நாம் அனுபவத் தில் காணலாம். கீலுக்கு மிகமிக அண்மையில் நாம் விசை

கொண்டு தள்ளிக் கதவைத் திறக்க முயன்றாலோ மூடமுயன்றாலோ, அச்செயல் மிகக் கடினமாயிருப்பதையும் நாம் காணலாம். இவ்வாறு ஏற்படும் நிலைகளை நாம் பொதுப்படுத்தி இப்போது பார்ப்போம்.

6–5.1. ஓர் அச்சையொட்டி (நேர்கோட்டை யொட்டி) ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் [Moment of a force about an axis (about a straight line])

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள், ஓர் அச்சை மையங்கொண்டு சுழலக் கூடியதாயிருப்பின்,

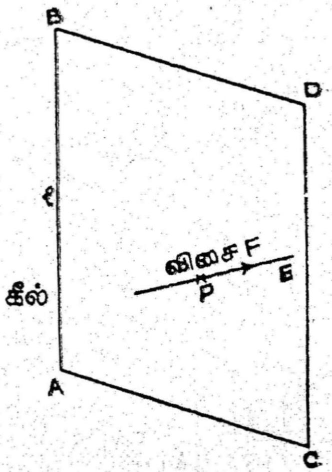
(1) சுழலச்சுக்கு இணையான திசையில் ஒரு விசை செயற்பட்டாலும்,

(2) சுழலச்சிலேயே ஒரு விசை செயற்பட்டாலும்,

(3) சுழலச்சை வெட்டும் ஒரு நேர்கோட்டுத் திசையில் ஒரு விசை செயற்பட்டாலும்,

அப்பொருள் சுழலாது: சுழல முடியாது.

இவற்றிற்கு விலக்கான எந்த திசையில் ஒரு விசை அக்கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்பட்டாலும், அப்பொருள் அவ்வச்சை மையங்கொண்டு சுழல முடியும். மேலே கூறப்பட்ட மூன்று வகைப்பட்ட விசைகள் ஒவ்வொன்றும் சுழலச்சினோடு ஒரே தளத்தில் அமையும் என்ற உண்மையை நாம் காணலாம். எனவே, சுழலச்சோடு ஒரே தளத்தில் அமையாத எந்த நேர்கோட்டின் மேலும் ஒரு விசை செயற்படுமானால், சுழற்சி ஏற்பட ஏதுவுண்டு



படம் 6-5.1.

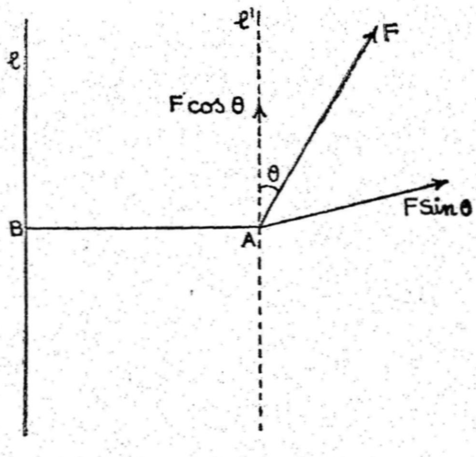
குறிப்பு: [6–5. –ல் நாம் கூறிய எடுத்துக்காட்டினை மேற்கூறிய கருத்தின் அடிப்படையில் விளக்குவோம். படம் 6–5·1.) பார்க்கவும்].

l என்ற கீலை யொட்டி *ABCD* என்ற கதவு சுழல முடியும். *AB* என்ற நேர்கோட்டிலேயே ஒரு விசை செயற்படுமாயின், கதவு சுழலாது.

AB–க்கு இணையாகவுள்ள ஒரு நேர்கோட்டில், எடுத்துக் காட்டாக *CD* என்ற நேர்கோட்டிலேயே ஒரு விசை செயற்படு மாயினும், கதவு சுழலாது.

AB ஐச் சந்திக்கும் ஒரு நேர்கோட்டில், எடுத்துக்காட்டாக *CA* என்ற நேர்கோட்டிலேயே ஒரு விசை செயற்படுமாயினும் கதவு சுழலாது.

அதாவது செயற்படும் விசை *AB* உடன் ஒரே தளத்தில் அமையுமாயின், கதவு சுழலாது. இப்படி *AB* உடன் ஒரே தளத் தில் அமையாமல் வேறெந்த திசையிலும் செயற்படும் ஒரு விசை *AB* ஐ ஒட்டி அக்கதவைச் சுழல வைக்க முடியும். சுருங்கக்கூறின் *AB* என்ற நேர்கோட்டுடன் ஒரே தளத்தில் அமையக்கூடிய எக்கோட்டின் வழியாகவும் ஒரு விசை செல்லு மாயின், அவ்விசை அக்கதவை *AB* ஐ ஒட்டிச் சுழல வைக்க முடியாது; இந்த நிலைக்கு விலக்கான எந்த விசையும் அக் கதவை *AB*ஐ ஒட்டிச் சுழல வைக்க முடியும்.



படம் 6-5.1.

எடுத்துக்காட்டாகக் கதவின் தளத்தில் அமையாமல் *P* வழி யாக *CD*–க்கு ஓரளவு சாய்ந்தோ, அல்லது *CD*–க்குக் குத்துக்

கோடாகவோ உள்ள PE என்ற திசையில் ஒரு விசை F செயற்பட்டால், கதவானது AB ஐ ஒட்டி சுழலக்கூடும்]

l என்ற அச்சை மையங்கொண்டு சுழலக்கூடிய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் F என்ற அளவுள்ள ஒரு விசை செயற்படட்டும். F-ன் திசை, l-க்கு இணையானதல்ல; lஐச் சந்திக்கக் கூடியதுமல்ல. [படம் 6-5.1. (i).] பார்க்க.

இங்கு F செயற்படும் கோட்டிற்கும் l-க்கும் மீச்சிறு தூரம் AB எனக் கொள்க.

மீச்சிறு தூரம் AB எனக் கொள்வது யாதெனில் :

AB என்பது A-லிருந்து l-க்குக் குத்துக்கோடு; மேலும் AB என்பது B-லிருந்து F-க்கும் குத்துக்கோடு. அதாவது AB என்பது ஒருங்கே lக்கும் F-க்கும் குத்துக்கோடாகும்.

A வழியாக l க்கு இணையாக l' என்ற நேர்கோடு வரைக. l'-க்கும் F-க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனக் கொள்க. l'-ம் F-ம் A-ல் சந்திப்பதால், l'-ம் F-ம் ஒரே தளத்தில் அமைந்திருக்கும். அத்தளத்தில் F—ன் பிரித்த பகுதிகள் l'-ன் வழியாக $F \cos \theta$ எனவும், l'-க்குச் செங்குத்தாகச் $F \sin \theta$ எனவும் படத்தில் காட்டியபடி இருக்கும்.

$F \cos \theta$ என்பது l-க்கு இணை கோட்டில் செயற்படுவதால், அதற்குத் திருப்புத்திறன் இராது; பொருளைச் சுழலச் செய்யாது. எனவே, சுழலச் செய்வது $F \sin \theta$ என்ற பகுதி மட்டுமே. l ஐ ஒட்டி $F \sin \theta$—ன் திருப்புத்திறன் $AB \times F \sin \theta$ என்பதாகும். இந்த அடிப்படையில் ஓர் அச்சை ஒட்டி அச்சோடு ஒரு தளத்தமையாத ஒரு விசையின் திருப்புத்திறனின் அளவினை வரையறுப்போம்:

திருப்புத்திறன்—வரையறை

l என்ற கோட்டிற்கும், F என்ற விசை செயற்படும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரத்தினால், l என்ற கோட்டிற்குச்செங்குத்தான திசையில் F-ன் பிரித்த பகுதியினைப் பெருக்கி வரும் தொகையே l என்ற அச்சினையொட்டி F-ன் திருப்புத்திறனின் அளவாகும்.

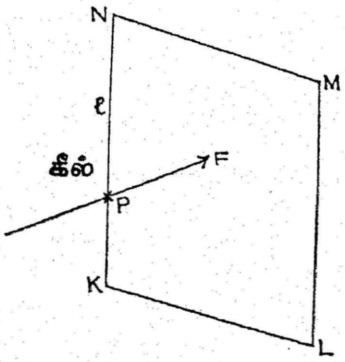
குறிப்பு (1): F என்ற விசை செயற்படும் கோடும் l-ம் வெட்டுமானால் $AB = 0$. எனவே, திருப்புத்திறன் பூச்சியம்.

(2) F என்ற விசை செயற்படும் கோடும், l-ம் ஒன்றினால் $AB = 0$, எனவே திருப்புத்திறன் பூச்சியம்.

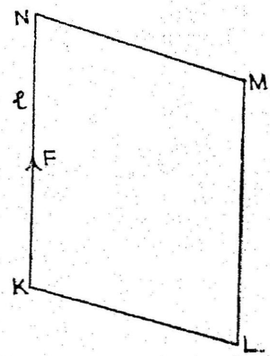
(3) F செயற்படும் கோடும் l-ம் இணை கோடுகளாயிருப்பின், $\sin \theta = 0$. எனவே, திருப்புத்திறன் பூச்சியம்.

(4) F செயற்படும் கோடும் l-க்கு இணையாக F ஐ வெட்டும் கோடும் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குமாயின், திருப்புத்திறன் $F \times AB$ (இங்கு $\theta = 90°$, $\sin 90 = 1$).

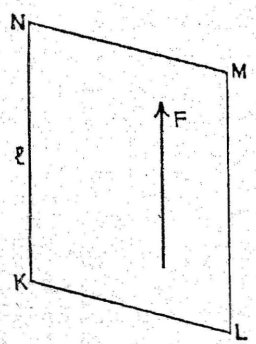
மேற்கூறிய குறிப்புகளை விளக்கும் வகையால் முதல் கூறிய எடுத்துக்காட்டான ஒரு கீலை மையங்கொண்டு சுழலும் கதவை



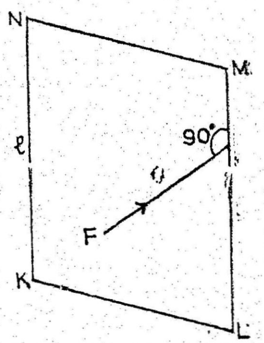
படம் 6-5.2. (i)



படம் 6-5.2. (ii)



படம் 6-5.2. (iii)

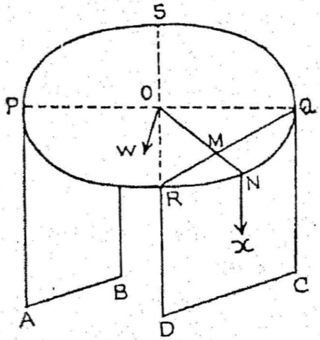


படம் 6-5.2. (iv)

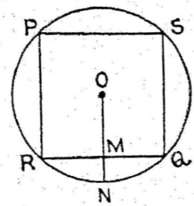
மறுபடியும் எடுத்துக் கொள்வோம். [படம் 6-5.2. (i), (ii), (iii), (iv)] முறையே குறிப்புகள் (1), (2), (3), (4) ஐ விளக்கும் l என்ற கோடு கதவின் கீல் எனக் கொண்டு காண்க.

[படம் 6-5.2. (iv)]-ல் கதவின் அகலம் × F என்பதே lஐ ஒட்டி அவ்விசையின் திருப்புத்திறன். பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு மேற்கூறப்பட்ட கருத்துகளையும், வரையறையினையும் பயன்படுத்தும் வழிகளை விளக்கும்.

6-5.3. **எடுத்துக்காட்டு:** (1) ஒரு வட்டமேசை, அதன் விளிம்பில் சம தூரங்களில் பதிக்கப்பட்ட நான்கு கால்களின் மேல் நிற்கிறது. அதன் எடை W ஆனால், அதைக் கவிழ்க்கத் தேவைப்படும் மீச்சிறுவிசை $(\sqrt{2}+1)W$ என நிறுவுக.



படம் 6-5.3. (i)



படம் 6-5.3. (ii)

[படம் 6-5.3. (i)]-ல் $PSQR$ ஒரு வட்ட மேசையின் வட்டப் பகுதி; AP, BS, CQ, DR என்ற குத்துக் கால்கள் அவ்வட்ட விளிம்பில் சமதூரங்களில் பதிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

மேசையைக் கவிழ்க்க நமது முயற்சி மிகக்குறைவாக (மீச்சிறு முயற்சி) இருக்க வேண்டுமேயானல், RQ (அல்லது PS, அல்லது QS, அல்லது PQ) என்ற பகுதியில் ஓரத்தின்கண் மையத்தில் அழுத்தினல், மேசை காலடிக் கோடு DC, (அல்லது AB, BC, AD) என்ற அச்சை மையங்கொண்டு சுழலும்; கவிழ்ந்து விழும். நாம் அவ்வாறு அழுத்தும்போது மேசையின் மையமான O-ல் செயற்படும் W என்ற மேசையின் எடை, மேசை கவிழாமல் தடுக்க முயலும். இப்போது வில் (arc) RQ-ன் மையப்புள்ளி N-ல் ஓர் எடை xஐ வைத்து அழுத்து வோம். DCஐ ஒட்டி x-ன் திருப்புத்திறன் $x\,MN$. [படம் 6-5.3. (ii)-ம் உடனடியாகப் பார்த்துக் கொள்க.] அத்திருப்புத்திறன், வலஞ்சுழியாக இருக்கும். DC-ஐ ஒட்டி, O-ல் செயற்படும் W-ன் திருப்புத்திறன் $W.\,OM$. இத்திருப்புத்திறன், இடஞ்சுழி யாக இருக்கும்.

$x.MN$-ன் மதிப்பு, $W{\cdot}OM$-க்குச் சமமாகயிருந்தால் அல்லது சற்று மிகுந்தால், மேசையானது DC ஐ மையங் கொண்டு சுழன்று கவிழும் நிலை ஏற்படும்.

$x.\ MN = W{\cdot}OM$ என்ற சமன்பாடு நமக்கு வேண்டிய மீச்சிறு அழுத்த விசையைத் தரும். வட்டத்தின் ஆரம் a எனக் கொண்டால்,

$$OR = a \quad \angle ORM = 45^\circ$$

$$\therefore\ OM = a \sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$MN = a\text{-}a \sin 45 = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ x$ ஐத்தரும் சமன்பாடு,

$$x.\ \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = W\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x = \frac{W}{\sqrt{2}-1} = W(\sqrt{2}+1)$$ எனப்பெறப்படும்.

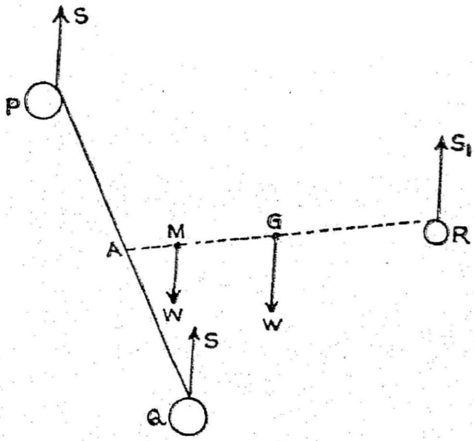
வேறு எங்கு அழுத்தினலும், (RQ, QS, SP, PR-ன் மையப் புள்ளிகள் தவிர) MN அளவு குறையுமாதலின், மேற்கூறியது மட்டுமே மீச்சிறு விசைக்குப் பொருந்தும்.

பயிற்சி 6 (b)

1. ஒரு மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கழி, ஒரு முனையில் பதித்த கீலைச்சுற்றி சுழலமுடியும். கீலிலிருந்து 20 செ.மீ. தூரத்தில் ஒரு கயிறு கட்டி, அக்கயிற்றின் மற்றொருமுனை குத்து நிலையில் மேலே ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது அக் கழி கிடைநிலையிலிருக்கிறது. அக்கயிறு ஒரு கி.கி. எடைக்கு மேல் தாங்காது. கழிக்குள்ள எடை மிகச் சிறிது எனக்கொண் டால், கழியின் அசைவு நிலைமாருமல் அதன் மற்றொரு முனையில் எவ்வளவு பாரம் வரையில் கட்டலாம்?

2. மூன்று சக்கர மிதிவண்டி ஒன்றின் எடை W கி.கிராம், இரண்டு பெரிய முன் சக்கரங்கள் 1 மீட்டர் இடைவெளியிலும், அவற்றின் பின்னல் சமச்சீராக ஒரு சிறிய சக்கரம் 1 மீட்டர்

தூரத்திலுமிருக்கிறது. வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் முன் சக்கரங்களுக்குப் பின்னுல் 25 செ. மீ. தூரத்திலுள்ளது. W எடையுள்ள மனிதன் முன் சக்கரங்களின் பின் 10செ.மீ.தூரத்தில் அமர்ந்திருக்கிருன். அந்தச் சக்கரங்களின் மேல் தனித் தனியாக அழுத்தங்களென்ன? (படம் 6-6) காண்க.



படம் 6-6.

P, Q முன் சக்கரங்கள்; $PQ = 1$ மீட்டர், R பின் சக்கரம்; $AR = 1$ மீட்டர். வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் G; $AG = 25$ செ.மீ. M உட்கார்ந்துள்ள மனிதன். $AM = 10$ செ. மீ. G-ல் வண்டியின் எடையும், M-ல் மனிதனின் எடையும் செங்குத்தாகக் கீழே செயற்படுகின்றன. P, Q, R என்ற சக்கரங்கள் அழுத்தப்படுவதால் P, Q, R என்ற இடங்களில் முறையே S, S, S_1 என்ற எதிர்விஞைகள் செயற்படுகின்றன. இவை அழுத்தங்களுக்குச் சமம். PQ என்ற அச்சை ஒட்டித் திருப்புத்திறன்கள் கண்டால், S, S என்ற எதிர்விஞைகளுக்குத் திருப்புத்திறன்கள் இரா. வண்டி அசைவற்ற நிலையில் இருப்பதால், PQஐ ஒட்டி $W(M)$, $W(G)$, $S_1(R)$ என்ற விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore W \times 10 + W \times 25 - S_1 \times 100 = 0$$

$$\therefore S_1 \times 100 = 35\, W$$

$$S_1 = \frac{35}{100} W = 0{\cdot}35\, W$$

R ஐ ஒட்டி திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம்.

$$\therefore W \times 75 + W \times 90 - 2S \times 100 = 0.$$

$$S = \frac{165\ W}{2 \times 100} = 0.825\ W$$

இதையே மாற்று முறையாக, PQ என்ற அச்சை யொட்டிய திருப்புத்திறன்கள் காணுமலேயே செய்யலாம்.

P, Q-ல் செயற்படும் S, S என்ற எதிர்விணைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை $2S$ ஆனது A-ல் (சமச்சீரான அமைப்புகள் இருப்பது) செயற்படும். எனவே $2S$ ஐ செயற்படுமாறு கொள்வதால், எல்லா விசைகளும், அதாவது $2S\,(A)$, $W\,(M)$, $W\,(G)$, $S_1\,(R)$ என்பவை இணைவிசைகள், ஒரு நேர்கோட்டில் செயற்படுகின்றன என்ற நிலையில் A ஐ ஒட்டிய திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

மேலும், $W + W = 2S + S_1$

A ஐ ஒட்டிய திருப்புத்திறன்: $W \times 10 + W \times 25 - S_1 \times 100 =$

எனவே, $S = 0.825\ W$ எனவும், $S_1 = 0.35\ W$ எனவும் பெறப்படும்.

3. ஒரு வட்ட மேசையின் ஓரத்தில் பதிக்கப்பட்ட மூன்று கால்கள் மேல் அம் மேசை நிற்கிறது. கால்களின் முனைகள் ஒரு சம பக்க முக்கோணம். அம்மேசையின் மேல் எங்கு வேண்டுமானுலும் அம் மேசையில் கனமுள்ள ஓர் எடையை வைத்தால், மேசை விழாதென நிறுவுக.

4. ஒரு சதுர மேசை, முனைகளில் பதிக்கப்பட்ட நான்கு கால்கள் மேல் நிற்கிறது. மேசையின் எடை W. ஒரு மூலையில் W-க்குச் சரியான அல்லது குறைந்த எடையை வைத்தால், மேசை கவிழாதென நிறுவுக.

5. ஒரு வட்ட வளையம் A, B, C என்ற மூன்று முளைக் குச்சிகள் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. ABC என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்கள் முறையே $45°$, $60°$, $75°$ ஆனுல், அம் முளைக்குச்சிகளின் எதிர்விணைகள் $2 : \sqrt{3} : 1$ என்ற விகிதத்திலுள்ளன வென நிறுவுக.

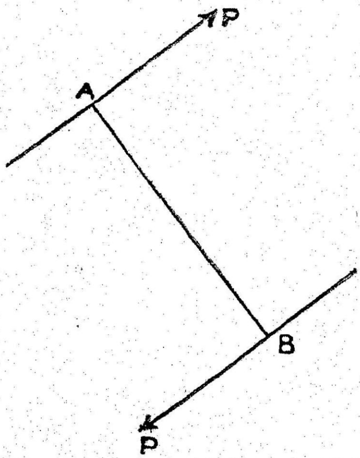
6. ஒரு முச்சக்கர மிதிவண்டியின் எடை W. பின்னால் இரு பெருஞ் சக்கரங்கள் ஒரு மீட்டர் இடைவெளியில் சமச்சீராக உள்ளன. அவற்றிற்கு முன்புறம் 1 மீட்டர் 70 செ.மீ. தூரத்தில ஒரு சிறு சக்கரம் உள்ளது. பின் சக்கரங்களுக்கு முன்னால் 40 செ.மீ. தூரத்தில் வண்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் உள்ளது. $\frac{3}{2}W$ எடையுள்ள ஒரு மனிதன் பின் சக்கரங்களுக்கு முன்புறம் 30 செ.மீ. தூரத்தில் அமர்ந்திருக்கிறன். மூன்று சக்கரங்களின் மேலுள்ள அழுத்தங்கள் யாவை?

7. சுழலிணைகள் (இரட்டைகள்)

(Couples)

7-1. வரையறை : **இரு சம விசைகள் எதிரெதிர்த் திசைகளில் இணை கோடுகளில் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படுமாயின், அவை இரண்டும் சேர்ந்து ஒரு சுழலிணை எனப்படும்.**

அவ்விரு விசைகளுக்கும் இடைப்பட்ட குத்துத் தூரம் அச் சுழலிணையின் **கரம்** (arm) எனப்படும். அதாவது ஒரு விசை செயற்படும் கோட்டில் ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து, மற்றொரு விசை செயற்படும் கோட்டிற்கு வரையப்படும் குத்துத் தூரமே அச் சுழலிணையின் கரமாகும். (படம் 7-1.)-ல் P, P என்ற சுழலிணையின் கரம் AB.



படம் 7-1.

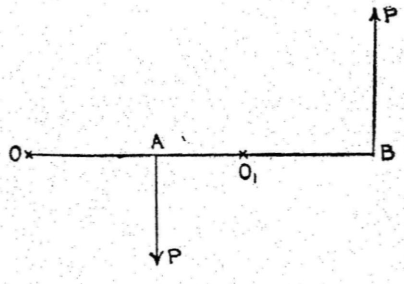
$P \times AB$ என்பது அச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்; அதாவது சுழலிணையின் ஒரு விசையை அதன் கரத்தால் பெருக்கிவரும் தொகையே அச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் எனப்படும்.

முன்னர் 5–3. குறிப்பு (i)-ல் இரு இணை விசைகள் நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுங்காலை, அவ்விரு விசைகளும் அளவில் சமமாயிருப்பின், அவ்விரு விசை

களின் (கூட்டு) விளைவு விசையென ஒரு விசையைக் காண இயலாமையை எடுத்துக் காட்டினோம். எனவே, அவ்விரு சம இணை எதிர் விசைகளுக்கு ஒரு சிறப்புண்டு எனவும் கூறினோம். அவ்விரு விசைகள் மட்டும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும் போது, பொருள் நகராது; ஓர் அச்சை யொட்டிச் சுழல மட்டும்தான் செய்யும்.

எடுத்துக் காட்டாக, சுவர் கடிகாரத்திற்குச் சாவி கொடுக்கும் போது, அச சாவிச் சுழற்சி நாம் இரு முனைகளையும் பிடித்து அழுத்துவதால் ஏற்படுகிறது; அவ்வாறே கைப்பிடி கொண்டு கதவைத் திறக்கும்போதும், ஒரு நீர்க் குழாயைத் திருப்பும் போதும், ஒரு மிதி வண்டியின் கரங்களைத் திருப்பும் போதும், இவ்விதமான இரு இணை எதிர் சம விசைகள் செயற்படுவதை நாம் கவனித்துப் பார்க்கலாம். இவ்வித சுழலிணைகளைப் பற்றிய சில தேற்றங்கள் பின்னர் கொடுக்கப்படுகின்றன.

7-2. **தேற்றம் 1 : ஒரு சுழலிணை செயற்படும் தளத்தில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை யொட்டி, அவ்விரு விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத் திறன் ஒரு மாறிலி; அம் மாறிலி அளவு அச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்.**



படம் 7-உ.

(படம் 7-2.)-ல் காட்டியபடி P, P என்ற இரு இணை எதிர் சம விசைகள் சுழலிணையின் விசைகள்; அத் தளத்தில் O ஏதாவதொரு புள்ளி.

O-லிருந்து விசைக் கோடுகளுக்கு OAB என ஒரு குத்துக் கோடு வரைக.

Oஐ ஒட்டி, A-ல் செயற்படும் P-ன் திருப்புத்திறன்

$$= OA \cdot P\ (-)$$

B–ல் செயற்படும் P-ன் திருப்புத்திறன்

$$= OB \cdot P \ (+)$$

இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் $= P(OB - OA)$

$$= P \cdot AB$$

= சுழலிணையின் திறப்புற்திறன்.

P, P_1 செயற்படும் கோடுகளுக்கு இடையில் மற்றொரு புள்ளி O_1 எடுத்துக்கொண்டாலும், இம் முடிவு உண்மையாகும்.

Oஐ ஒட்டி, A-ல் செயற்படும் P-ன் திருப்புத்திறன்

$$= P . O_1A \ (+)$$

B-ல் செயற்படும் P-ன் திருப்புத்திறன்

$$= P . O_1 B \ (+)$$

இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் $= P \ (O_1A + O_1 B)$

$$= P . AB$$

= சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்.

சுழலிணைகளைப் பற்றி இது ஒரு முக்கியமான தேற்றம்.

7-2·1. **தேற்றம் 2 : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் சம திருப்புத் திறன்களுள்ள இரு சுழலிணைகள் எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயற்பட்டால் (அதாவது ஒன்று வலஞ் சுழியாகவும், மற்றொன்று இடஞ் சுழியாகவும்), அப் பொருள் அசைவற்று இருக்கும்** (அதாவது ஒரு திருப்புத் திறன் மற்றொன்றுக்கு எதிரீடு செய்து, பொருளை அசைவற்ற நிலையில் வைக்கும்).

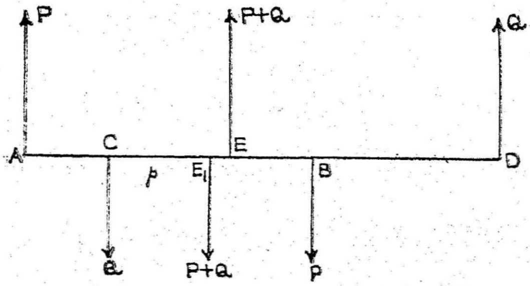
கொடுக்கப்பட்டது : ஒரு சுழலிணை (P, P) என்ற விசைகளோடு p என்ற அளவுடைய கரம் பெற்றது (வலஞ் சுழி). மற்றோர் சுழலிணை (Q, Q) என்ற விசைகளோடு q என்ற அளவுடைய கரம் பெற்றது (இடஞ் சுழி). முதல் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $P \cdot p \ (-)$. இரண்டாவது சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $Q \cdot q \ (+)$. $P \cdot p$-ன் எண் மதிப்பும், $Q \cdot q$-ன் எண் மதிப்பும் சமம்.

(i) (P, P)-ன் திசைகளும், (Q, Q)-ன் திசைகளும் ஒருங்கே இணை கோடுகளில் செயற்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம். [படம் 7-2.1. (i) காண்க.]

$AB = p$ (P, P)-ன் கரம் $(-)$

$CD = q$ (Q, Q)-ன் கரம் $(+)$

எல்லாம் இணை கோடுகள்.



படம் 7-2.1. (i)

$P.BA = Q.CD$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுருக்கிறது. ... (1)

A, D என்ற இடங்களில் செயற்படும் P, Q என்பவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(P+Q)$ அளவோடு மேல் நோக்கி

$P.AE = Q.ED$ என்பதற்கிணங்க E-ல் செயற்படும். ... (2)

(1)−(2) $P(AB-AE) = Q(CD-ED)$

$P.EB = Q.CE$ ... ... (3)

C, B என்ற இடங்களில் செயற்படும் Q, P என்பவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(P+Q)$ அளவோடு கீழ் நோக்கி $P.BE_1 = Q.CE_1$ ... ... (4)

என்பதற்கிணங்க E_1-ல் செயற்படும்.

(3), (4)-ம் ஒப்பிட்டால், E, E_1 இரண்டும் ஒரே புள்ளி யெனத் தெரியவரும்.

எனவே, C, B என்ற இடங்களில் செயற்படும் Q, P என்பவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $(P+Q)$ என்ற அளவோடு E-ல் செயற்படும்.

எனவே A, D-ல் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு விசை E-ல் $(P+Q)$; மேல் நோக்கி. C, B-ல் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு

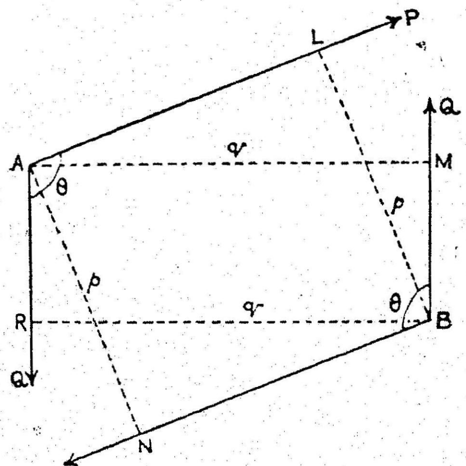
விசை E-ல் $(P+Q)$; கீழ் நோக்கி. எனவே, இரு சுழலிணைகளின் நான்கு விசைகள் செயற்படுவதின் விளைவாக அப்பொருள் அசைவற்றிருக்கும்.

(ii) (P, P) செயற்படும் கோடுகளும், (Q, Q) செயற்படும் கோடுகளும் சந்திப்பனவாகக் கொள்வோம். [படம் 7-2·1. (ii) காண்க.]

(P, P)-ன் கரம் p; திருப்புத்திறன் $P \cdot p$ (—)

(Q, Q)-ன் கரம் q; திருப்புத்திறன் $Q \cdot q$ (+) எனக் கொள்க.

$P \cdot p = Q \cdot q$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.



படம் 7-2.1. (ii)

ஒரு P-ம், ஒரு Q-ம் A-ல் சந்திக்கட்டும். இடைப்பட்ட கோணம் θ. மற்ற P-ம், மற்ற Q-ம் B-ல் சந்திக்கட்டும். வடிவ கணிதப்படி இவ்விரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ தானிருக்கும். A-லிருந்து AM, AN என்ற குத்துக்கோடுகளும், B-லிருந்து BL, BR என்ற குத்துக் கோடுகளும் படத்தில் காட்டியபடி வரைக. நமக்குக்கொடுக்கப்பட்டபடி $AN = p = BL$; $BR = q = AM$. A-ல் சந்திக்கும் PQ என்பவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை A வழியாகச்செல்லும். மேலும், Bஐ ஒட்டி அவ்விரு விசைகளின்

இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன்

$$= - P.BL + Q.BR$$
$$= - P.p + Q.q$$
$$= 30$$

எனவே, 6-3·2-ல் கண்டபடி, இவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை B வழியாகச் செல்லும். எனவே, A-ல் செயற்படும் P, Q-ன் (கூட்டு) விளைவு விசை

$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$; செயற்படும் திசைக்கோடு $\overline{AB}$.

இவ்வாறே B-ல் செயற்படும் P, Q-ன் (கூட்டு) விளைவு விசை A வழியாகச் செல்லும்; ஏனெனில் Aஐ ஒட்டி அவ்விரு விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத் திறன்

$$= - P.AN - Q.AM$$
$$= - P.p + Q.q$$
$$= 0$$

எனவே, B-ல் செயற்படும் P, Q-ன் (கூட்டு) விளைவு விசை

$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$; செயற்படும் திசைக்கோடு $\overline{BA}$.

எனவே, A வழியாக $\overline{AB}$ என்னும் திசையில் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு விசையும், B வழியாக $\overline{BA}$ என்னும் திசையில் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு விசையும், ஒரே கோட்டில் சமமாக நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுகின்றன. ஆக, அவை அசைவற்ற நிலை தரும்.

எனவே, இவ்விரு சுழலிணைகளின் நான்கு விசைகளுக்கும் (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாகிறது. எனவே, இந்நான்கு விசைகளும் செயற்படும் பொருள் அசைவற்று இருக்கும்.

எனவே, இரு சுழலிணைகள், ஒரு தளத்தில் நேரெதிர்த் திருப்புத்திறன் சமமாகப் பெறின், அவை செயற்படும் பொருள் அசைவற்றிருக்கும். அதாவது, ஒன்றுக்கொன்று எதிரீடு செய்து பொருளை அசைவற்ற நிலையில் நிறுத்தும்.

7-2.2. ஒரு தளத்தில் சமமான எதிரெதிர்த் திருப்புத் திறன்கள் பெற்ற இரு சுழலிணைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரீடு செய்து அசைவற்ற நிலையைத் தருவதால், ஒரு சுழலிணையின் விசைகளை எதிர்த் திசைகளுக்கு மாற்றும்போது, பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கும்.

தேற்றம் 3 : ஒரு தளத்தில் ஒரே திசையில் சமமான திருப்புத்திறன்கள் பெற்ற சுழலிணைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகும்.

பின்வருமாறும் இக்கிளைத் தேற்றத்தை நிறுவலாம் :

(P, P) என்ற சுழலிணை, கரம் p ;

(Q, Q) என்ற சுழலிணை, கரம் q; இரண்டும் ஒரே திசை, சம திருப்புத்திறன் உள்ளவை எனக் கொள்க.

(R, R) என்ற சுழலிணை, கரம் r, மாற்று திசையும் அதே சம திருப்புத்திறனும் உள்ளதெனக் கொள்க. தேற்றம் 2-ன் படி, (P, P)-ம் (R, R)-ம் அசைவற்ற நிலை தரும். அவ்வாறே (Q, Q)-ம் (R, R)-ம் அசைவற்ற நிலை தரும். எனவே, (P, P)-ம் (Q, Q)-ம் சமம் அல்லது ஒரே விளைவினைத்தான் தரும் என்பது நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, ஒரே திசையில் சம திருப்புத்திறனுள்ள சுழலிணைகள் இருப்பின், ஒன்றுக்கொன்று சமம்; ஒன்றைக் கொண்டு மற்றொன்றை ஈடு செய்யலாம். எனவே, G என்ற திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணை இருக்குமாயின், அதைத் திருப்புத்திறனும் திசையும் கொண்ட மற்றொரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யமுடியும்.

$G = P \cdot p = Q \cdot q = S \cdot s = \ldots\ldots..$ **என இருப்பின்,** (P, P), (Q, Q), (S, S) **என்ற சுழலிணைகள் எல்லாம் சமம் ; எது செயற்பட்டாலும், விளைவு ஒன்றேதான். இது சுழலிணைகளின் முக்கியமான பண்பு.**

குறிப்பு : அவ்விதமாக ஒரே திசையிலுள்ள இரு சுழலிணைகளும், அதே திசையில் இருமடங்கு திருப்புத்திறன் உள்ள மற்றொரு சுழலிணையும் சமமெனத் தெரிகிறது.

7-2-3· தேற்றம் 4: ஒரே தளத்தில் சுழலிணைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படின், அவை யாவும் அச் சுழலிணைகளின் இயற்கூட்டுத் திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரே ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

திருப்புத்திறன்கள் சமமாய், ஒரே திசையிலுள்ள இரு சுழலிணைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமம் என 7-2.2-ல் தேற்றம் 3-ல் கண்டோம். இப்போது (P, P) கரம் p; (Q, Q) கரம் q;

(R, R) கரம் r; (S, S) கரம் s...... கொண்ட சுழலிணைகள் ஒரே தளத்தில் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம்.

(Q, Q) என்ற சுழலிணையை, (P, P) செயற்படும் கோடுகளில் $\left(\frac{Qq}{p}, \quad \frac{Qq}{p}\right)$ என்ற சுழலிணையால் ஈடு செய்யலாம். (R, R) என்ற சுழலிணையை (P, P) செயற்படும் கோடுகளில் $\left(\frac{Rr}{p}, \frac{Rr}{p}\right)$ என்ற சுழலிணையால் ஈடு செய்யலாம். இவ்வாறு ஈடு செய்யப்பட்ட விசைகள் யாவும், p என்ற அளவுள்ள கரங் கொண்டு,

$$\left(P \pm \frac{Qq}{p} \pm \frac{Rr}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots \; P \pm \frac{Qq}{p} \pm \frac{Rr}{p} \pm \ldots\ldots\ldots \right)$$

என்ற சுழலிணையாகும். இச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்

$$\left(P \pm \frac{Qq}{p} \pm R\frac{r}{p} \ldots\ldots\ldots \right) p = Pp \pm Qq \pm Rr \pm Ss \ldots\ldots$$

குறிப்பு : $+$ குறி இடஞ்சுழி திருப்புத்திறனையும், $-$ குறி வலஞ்சுழி திருப்புத்திறனையும் மரபுப்படி குறிக்கும். எனவே, எல்லாச் சுழலிணைகளும்,

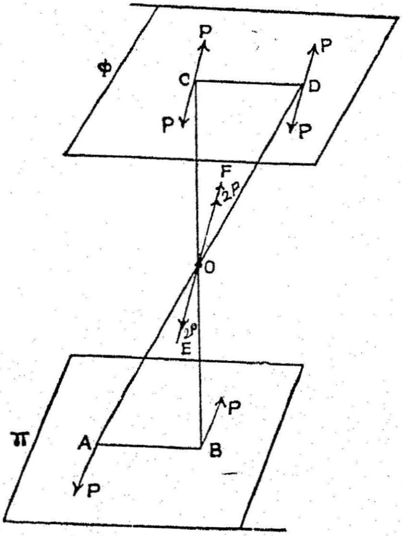
$$\left(P \pm \frac{Qq}{p} \pm \frac{Rr}{p} \ldots\ldots, \quad P \pm \frac{Qq}{p} \pm \frac{Rr}{p} \ldots\ldots\ldots \right)$$

என்ற ஒரே ஒரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யப்படுகின்றன. இது செயற்படும் கரம் அளவு p.

(7-2.4.) தேற்றம் 5: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் ஒரு தளத்தில் செயற்படும் ஒரு சுழலிணையை அத்தளத்திற்கு இணையாகவுள்ள ஒரு தளத்தில் முதற் சுழலிணையின் கரத்திற்கு இணையாக உள்ள ஒரு கரம் பெற்ற மற்றொரு சமச் சுழலிணையால் ஈடு செய்தால் விளைவு மாறாது.

படம் 7-2.4-ல் π, ϕ என்பவை இரு இணைத் தளங்கள். π-ல் AB என்ற கரங்கொண்டு (P, P) என்ற சுழலிணை செயற்படுகிறதெனக் கொள்க. அதன் திருப்புத்திறன் $P \times p$ $(=P \times AB)$ எனக் கொள்க. ϕ-ல் $CD \parallel AB$ ஆகவும், $CD = AB$ என்ற வகையில் CD என்ற கோடு வரைக. எனவே, $ABCD$ ஓர்

இணைகரம் ; AD, CB அவ் விணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ; அவை வெட்டுமிடம் O. O என்ற புள்ளியில் BC, AD என்ற இரு மூலை விட்டங்களும் இரு சம கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. O வழியாக P செயற்படும் கோட்டிற்கு இணையாக EOF என்ற



படம் 7-2.4

நேர்கோடு வரைக. AB என்ற கரம் கொண்டு செயற்படும் P, P என்ற விசைகளுக்கு இணையாக ϕ-ல் C, D என்ற புள்ளிகளில் P, P, P, P என்ற நான்கு விசைகளைச் செயற்படச் செய்க.

C-ல் செயற்படும் P, P இரண்டும் அசைவற்ற நிலை தரும். D-ல் செயற்படும் P, P இரண்டும் அசைவற்ற நிலை தரும். ஆகவே, இந்நான்கு P விசைகள் C, D-ல் செயற்படுவதால், விளைவு ஒன்றுமில்லை. இப்போது A, D இரண்டிலும் ஒரே திசையில் செயற்படும் P, P என்ற விசைகள் இணை விசைகள் ; அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $2P$ என்பது AD-ன் மையப் புள்ளி O-ல் P-க்கு இணையாகச் செயற்படும்.

அவ்வாறே B, C இரண்டிலும் ஒரே திசையில் செயற்படும் P, P என்ற விசைகள், இணை விசைகள் ; அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $2P$ என்பது BC-ன் மையப் புள்ளி O-ல் P-க்கு இணையாகச் செயற்படும். முன்கண்ட $2P$ என்ற விசையும்,

இந்த $2P$ என்ற விசையும் ஒரே நேர்கோட்டில் O-ல் எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயற்பட்டு அசைவற்ற நிலை தரும்.

எஞ்சியிருப்பவை, C, D என்ற புள்ளிகளில் முறையே $P \downarrow$ என்ற விசையும், $P \uparrow$ என்ற விசையும்தான் அவை சமம்; எதிர்த் திசைகளில் செயற்படுகின்றன.

கரம் $CD=p$; எனவே, திருப்புத் திறன் $P \cdot p$. ஆகவே, π என்ற தளத்தில் AB என்ற கரம் கொண்ட சுழலிணை ϕ என்ற தளத்தில் CD என்ற கரம் கொண்ட சுழலிணைக்குச் சமமாகிற நிறுவப்படுகிறது. செயற்படும் கரங்கள் இணை கோடுகள்; சம தென்பது அளவு உடையவை. இப்போது π-ல் செயற்படும் சுழலிணை ϕ-ல் செயற்படும் சுழலிணையாக மாற்றப்பட்டது.

ϕ-ல் செயற்படும் சுழலிணையை அதே திருப்புத்திறன் பெற்ற மற்ரொரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யலாம். இரண்டும் சமமாக இருக்குமென நாம் அறிவோம். எனவே, பின்வரும் தேற்றம் உருவாகிறது.

தேற்றம் 6 : ஒரு தளத்தில் செயற்படும் சுழலிணையை அதற்கு இணையாக உள்ள தளத்தில் அதே திருப்புத்திறன் பெற்ற மற்ரொரு சுழலிணையால் ஈடு கட்டலாம்.

எனவே, இதுவரை நாம் அறிந்தவற்றைத் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல்,

(1) ஒரு தளத்தில் இரு சுழலிணைகள், சமமான திருப்புத் திறன் பெற்று, எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயற்படுமாயின், அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையில் இருக்கும்.

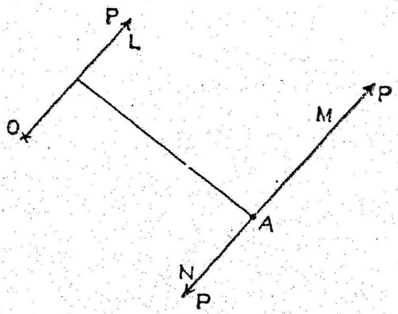
(2) ஒரு தளத்தில் ஒரு சுழலிணை செயற்படுமாயின், அச் சுழலிணையை, அதே திருப்புத்திறனும் திசையுமுள்ள மற்ரொரு சுழலிணையால் விளைவு மாருமல் ஈடு செய்யலாம்.

(3) ஒரு தளத்தில் பல சுழலிணைகள் செயற்படுமாயின், அச் சுழலிணைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் பெற்ற வேரொரு, ஒரே ஒரு சுழலிணையால் அச் சுழலிணைகள் யாவற்றையும் விளைவு மாருமல் ஈடு செய்யலாம். அவ்விதம் ஈடு செய்யும் ஒரே ஒரு சுழலிணை முதற் கூறிய பல சுழலிணைகளின் (கூட்டு) விளைவுச் சுழலிணை (Resultant Couple) எனப் படும்.

(4) ஒரு தளத்தில் குறிப்பிட்ட திருப்புத் திறனுடன் குறிப்பிட்ட திசையில் செயற்படும் ஒரு சுழலிணையை, அத் தளத்திற்கு இணையான மற்றொரு தளத்தில் அதே திருப்புத்திறனும் திசையுமுள்ள மற்றொரு சுழலிணையில் விளைவு மாறுமல் ஈடு செய்யலாம்.

(5) பல இணையான தளங்களில் அத்தனைச் சுழலிணைகள் செயற்படின், அவை யாவற்றையும் எல்லாத் தளங்களுக்கும் இணையான மற்றொரு தளத்தில் செயற்படும் ஒரே சுழலிணையாக ஈடு செய்ய முடியும்; இயற் கூட்டுத் திருப்புத் திறன் விளைவாகக் கிடைக்கும். இது ஒரு பொதுமைப்படுத்திய உண்மையாகும் எனக் காண்க.

7-3. **தேற்றம் 7 : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் விசைக்குப் பதிலாக, மற்றேதாவதொரு புள்ளியில் அதே அளவு, திசையுள்ள விசையும் ஒரு வசதியான சுழலிணையும் கொண்டு விளைவு மாருமல் ஈடு செய்யலாம்.**



படம் 7-3.

(படம் 7-3)-ல் O-ல் OL வழியாக ஒரு விசை செயற்படுகிறது. மற்றேதாவதொரு புள்ளி A எடுத்துக் கொள்க. A வழியாக OL-க்கு இணையாக MAN மேல் நேரெதிர்த் திசைகளில் $P\ (\overline{AM})$, $P\ (\overline{AN})$ செயற்படட்டும். அவை இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று தாமே எதிரீடு செய்துகொண்டு அசைவற்ற நிலை தரும்.

எனவே, $P\ (\overline{OL})$, $P\ (\overline{AM})$, $P\ (\overline{AN})$ மூன்றும் ஒருங்கே செயற்படின் ஏற்படும் விளைவே $P\ (\overline{OL})$ செயற்படும்போது

ஏற்படும். ஆக, இவ்விரண்டு விசை அமைப்புகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமம் ஆகும்.

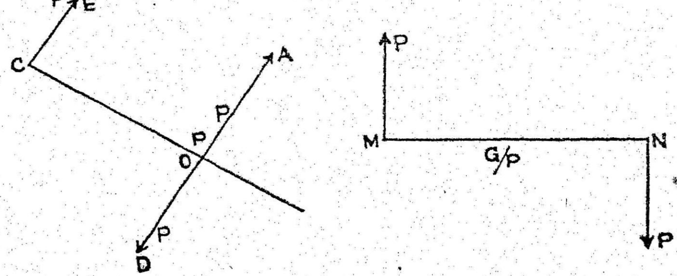
இப்போது $P\,(\overline{OL})$, $P\,(\overline{AN})$ சேர்ந்து ஒரு சுழலிணையாகும்; $P\,(\overline{AM})$ எஞ்சிய விசையாகும். எனவே O–ல் செயற்படும் P-ன் விசை விளைவு

$=$ A–ல் செயற்படும் அதே அளவும் திசையும் உள்ள P-ன் விசை $+$ ஒரு சுழலிணை (P, P)

குறிப்பு : ஏதாவதொரு புள்ளியை நாம் கொள்வதால், விசையோடு பெறப்படும் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன், அப்புள்ளி இருக்குமிடத்தைச் சார்ந்திருக்கும். சுழலிணையித் திருப்புத் திறன் அளவு, Aஐ ஒட்டி O-ல் செயற்படும் விசையின் திருப்புத் திறனாகும் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

7-3·1. **தேற்றம் 8 : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் ஒரு விசையும் ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து செயற்படின், அவ்விரண்டினையும் அதே அளவும் திசையும் பெற்று ஒரு குறிப்புட்ட புள்ளி வழியாகச் செயல்படும் ஒரு விசை கொண்டு விளைவு மாறாமல் ஈடு செய்யலாம்.**

(படம் 7-3·1)–ல் $P\,(\overline{OA})$ என்ற விசை O–ல் செயற்படுகிறதெனவும், அதே தளத்தில் G திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை ஒன்று செயற்படுகிறதெனவும் கொள்க. G–ன் அளவும், திசையும் கொடுக்கப்பட்டாலே ஒரு சுழலிணை கொடுக்கப்பட்டதற்குச் சமம். (படம் 7-3·1. காண்க.)



படம் 7-3.1.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சுழலிணை வலஞ்சுழி எனக்கொண்டால், (P, P) என்ற இரு நேரெதிர் இணை விசைகள்

$\frac{G}{P}$ என்ற கரம் கொண்டு வலஞ்சுழியாகச் செயற்படும் ஒரு சுழலிணை எனக் கொள்ளலாம். படத்தில் $MN = \frac{G}{P}$(சுழலிணையின் கரம்) O-ல் OA-க்குக் குத்துக்கோடாக OC என்ற கோட்டை வரைந்து $OC = MN$ என அளந்து கொள்க. O-லும், C-லும் படத்தில் காட்டியபடி வலஞ்சுழியாகத் திருப்புத் திறனுள்ள P, P என்ற விசைகளை AO-ன் நீட்டலிலும், OA-க்கு இணை கோட்டிலும் கொள்க.

இப்போது, $P\ (\overline{OA})$, $P\ (\overline{OD})$, $P\ (\overline{CE})$ என்ற மூன்றும் சேர்ந்து முறையே செயற்படும் விசை P-ம் செயற்படும் சுழலிணை, G-ம் ஆகும்.

O-ல் எதிரெதிர்த் திசைகளித் ஒரே நேர்கோட்டில் செயற்படும் சம விசைகள் அசைவற்ற நிலை தரும். எஞ்சி நிற்பது C-ல் செயற்படும் $P\ (\overline{CE})$. எனவே, ஒரு விசை P-ம், ஒரு சுழலிணை G-ம் சேர்ந்து செயற்படின், அவற்றிற்குப் பதிலாக அதே தளத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில், அதே அளவு திசை கொண்ட மற்றொரு விசை மட்டுமே ஈடு செய்யலாம்; விளைவு மாறுது என்ற உண்மை கிடைக்கிறது.

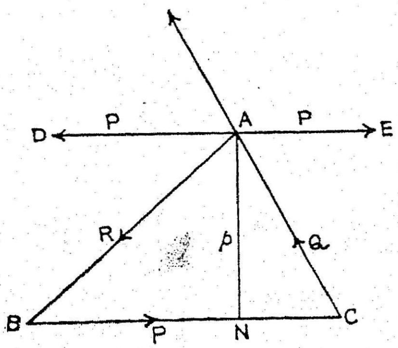
கிளைத் தேற்றம்: ஒரு தளத்தில் செயற்படும் ஒரு விசையும் ஒரு சுழலிணையும் அசைவற்ற நிலை தாரா.

7-4. **தேற்றம் 9: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும் மூன்று விசைகளை, அளவிலும் திசையிலும் முறையாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களினால் குறிக்க முடியுமானால், அவை மூன்றும், அம் முக்கோணத்தின் இரு மடங்கு பரப்பிற்குச் சமமான திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்; திசை, முறையாகபக்கங்களின் திசையாகும்.**

(படம் 7-4.)-ல் BC, CA, AB என்பவை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும் விசைகள், அளவிலும் திசையிலும் குறித்து நிற்கின்றன.

A-ல் BC-க்கு இணையான கோட்டில் இரு சம எதிரெதிர் விசைகள் P, P செயற்படின் அவை முன் கூறிய மூன்று விசைகளின் விளைவை பாதிக்காது; ஏனெனில், அவை யிரண்டும்

அசைவற்ற நிலைதரும். எனவே, இவ் வைந்து விசைகளும் முதற் கூறிய மூன்று விசைகளுக்குச் சமமாகும்.



படம் 7-4.

இவ்வைந்து விசைகளில B–ல் செயற்படும் $P\ (\overline{AE})$, $Q\ (\overline{CA})$, $R\ (\overline{AB})$ மூன்றும் முறையே BC, CA, AB என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களினுல் முழுவதும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, முக்கோண விதிப்படி, அவை மூன்றும் அசைவற்ற நிலை தரும்.

எஞ்சியிருப்பவை $P\ (\overline{AD})$, $P(\overline{BC})$ என்ற சம இணை யெதிர் விசைகள்; ஆகவே, ஒரு சுழலிணையாகும். அச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $= P \times AN$

$= P \times p$

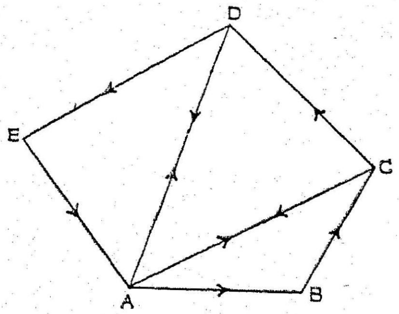
$=$ முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பைப் போல் இரு மடங்கு.

எனவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

7-4·1. தேற்றம் 10 : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் பல விசைகள் செயற்படும் போது அவை யாவற்றையும் அளவிலும் திசையிலும் முறையாக ஒரு மூடிய பலகோணத்தின் பக்கங்களினுல் குறிக்க முடியுமாஞல் அவ் விசைகள் யாவும் அப் பலகோணத்தின் இரு மடங்குப் பரப்புக்குச் சமமான திருப்புத் திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்; திசைகள் முறையாகப் பக்கங்களின் திசையாகும்.

(படம் 7-4·1.)-ல் குறிப்பிட்ட விசைகளைக் காண்க.

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 2 \triangle ABC$ — திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணை (இடஞ்சுழி)



படம் 7-4.1.

$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2 \triangle ACD$—திருப்புத் திறனுள்ள ஒரு சுழலிணை (இடஞ்சுழி)

$\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 2 \triangle ADE$—திருப்புத் திறனுள்ள ஒரு சுழலிணை (இடஞ்சுழி)

எனவே,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA}$$

$= 2 \times$ பலகோணம் $ABCDE$ — திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணை (இடஞ்சுழி)

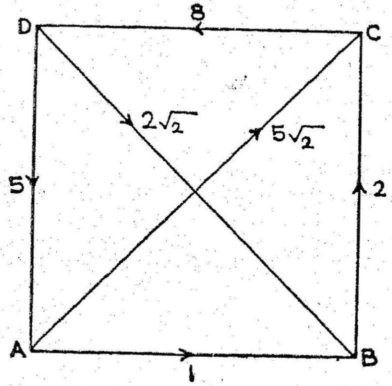
ஆனால், $\overline{CA} + \overline{AC} = 0$; $\overline{DA} + \overline{AD} = 0$

$\therefore$ $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$ = ஒரு இடஞ் சுழிச் சுழலிணை; அதன் திருப்புத்திறன் பலகோணம் $ABCDE$—ன் பரப்பைப் போல் இரு மடங்கு என நிறுவப்படுகிறது.

7–5. **எடுத்துக்காட்டு** 1: $ABCD$ ஒரு சதுரம், பக்க நீளம் 1 மீட்டர்; AB, BC, CD, DA, AC, DB வழியாக முறையே 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ கி. கிராம் விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு 8 கி. கி. — மீட்டர் திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணையென நிறுவுக (படம் 7–5.1.).

Aஐ ஒட்டி அவ்விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன்

$$= 2 \times 1 + 8 \times 1 - \frac{2\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{2}} = 8 \text{ கி. கி. — மீட்டர்.}$$



படம் 7-5.1.

Bஐ ஒட்டி அவ் விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன்

$$= 8 \times 1 + 5 \times 1 - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= 8 \text{ கி. கி. — மீட்டர்.}$$

எனவே, இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளை யொட்டி இவ் விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் சமமாயிருப்பதால், இவற்றின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணை; திருப்புத் திறன் 8 கி. கி.— மீட்டர்.

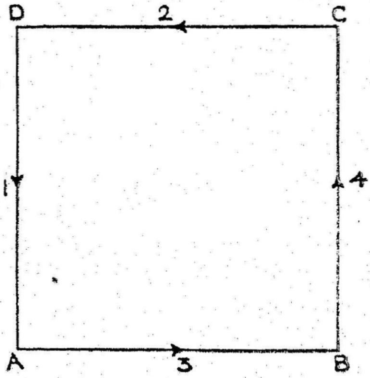
எடுத்துக்காட்டு (2): $ABCD$ ஒரு சம சதுரம், பக்கம் 3 மீட்டர்; 3, 4, 2, 1 கி. கிராம் விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA என்ற பக்கங்களில் செயற்படுகின்றன. இந்த விசையமைப்பை A வழியாக ஒரு விசையும் ஒரு சுழலிணையும் ஆகக் காட்டுக. (படம் 7-5.2. காண்க.)

B–ல் செயற்படும் 4 கி.கிராம். விசை

= A-ல் செயற்படும் 4 கி. கி. விசை + சுழலிணை,
திருப்புத்திறன் 4×3 (+)

C-ல் செயற்படும் 2 கி.கி. விசை

$=$ A-ல் செயற்படும் 2 கி. கி. விசை $+$ சுழலிணை திருப்புத்திறன் $2 \times 3\ (+)$



படம் 7-5.2.

இப்போது A-ல் செயற்படும் விசைகள்

$\overline{AD} = 3$ கி.கி. என்பதும்

$\overline{AB} = 1$ கி.கி. என்பதும்

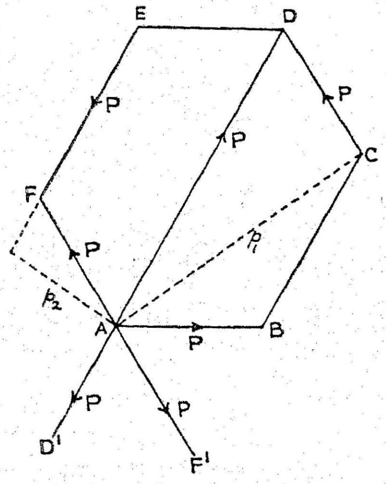
இரு சுழலிணைகள் $12+6 = 18$ கி.கி.—மீட்டர்களும் ஆகும்.

A-ல் செயற்படும் இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை $= \sqrt{10}$ கி.கி. AB-க்குச் சரிவு $\tan\theta = 3$; சுழலிணை திருப்புத்திறன் 18 கி.கி. மீட்டர்.

எடுத்துக்காட்டு 3: $ABCDEF$ ஒரு சீரான அறுகோணம். $\overline{AB}$ $\overline{CD}$, $(\overline{EF})$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு அவ்வறு கோணத்தின் பரப்பளவால் அளக்கப் படும் திருப்புத்திறனுடைய ஒரு சுழலிணையென நிறுவுக. (படம் 7-5.3.) காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் $P\,(\overline{AB})$, $P\,(\overline{CD})$, $P\,(\overline{EF})$ இவை மட்டுமே. A-ல் $\overline{AF}$, $\overline{AF'}$ என இரு சம விசைகள் P, P சேர்ப் பதால், அவையிரண்டும் எதிரீடு செய்து கொள்ளும். மேலும்

A–ல் $\overline{AD}$, $\overline{AD^1}$ என இரு சம விசைகள் சேர்ப்பதால், அவை இரண்டும் எதிரீடு செய்து கொள்ளும்.



படம் 7-5.3.

$\left\{P(\overline{CD});\ P(\overline{AF'})\right\}$ — ஒரு சுழலிணை; திருப்புத்திறன் $P \times p_1$ (கூட்டு)

$\left\{P(\overline{EF});\ P(\overline{AD})\right\}$ — ஒரு சுழலிணை; திருப்புத்திறன் $P \times p_2$ (கூட்டு)

மேலும் A–ல் $P(\overline{AB})$, $P(\overline{AF})$, $P(\overline{AD'})$ இம் மூன்றும் அசைவற்ற நிலை தரும்; ஏனெனில்,

$$\frac{P(\overline{AB})}{\sin 120} = \frac{P(\overline{AF})}{\sin 120} = \frac{P(\overline{AD'})}{\sin 120}$$

எனவே, முதல் கொடுக்கப்பட்ட மூன்று விசைகளும் $P \times p_1 + P \times p_2$ என்ற திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகிறது; $P = a$ எனக்கொள்வோம். அறுகோணப் பக்கம் a ஆனால், $p_1 = a\sqrt{3}$; $p_2 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore P \times p_1 + P \times p_2 = P.\ a\sqrt{3} + P.\ a\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

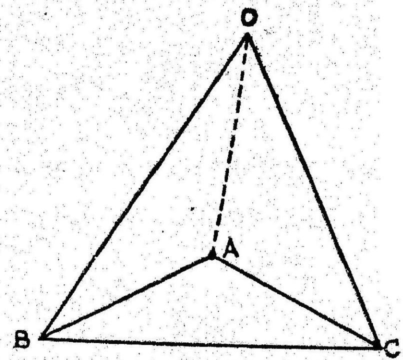
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} P a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

அறுகோணத்தின் பரப்பளவு $= 6 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$= 3 \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

எனவே, அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளை ஒரு சுழலிணை; அச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் அளவு அறுகோணத்தின் பரப்புக்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு (4) : $OABC$ ஒரு நான்முகி (Tetrahedron) OBC, OCA, OAB என்ற பரப்பளவுகளால் அளவிடக்கூடிய திருப்புத்திறன்கள் பெற்ற சுழலிணைகள் மூன்றின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணையெனவும், திருப்புத்திறனளவு ABC என்ற முக்கோணத்தில் பரப்பளவால் குறிப்பிடப்படுமென நிறுவுக. (படம் 7-5.4.) (ப.க.)



படம் 7-5.4.

$\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CO}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிப்பிடப்படும் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணை (+); அதன் திருப்புத்திறனளவு $2 \triangle OBC$ என்ற பரப்பளவு. இவ்வாறே

$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} =$ சுழலிணை (+) திருப்புத்திறனளவு $2 \triangle OAB$ என்ற பரப்பளவாலும்,

$\overline{OC} + \overline{CA} + \overline{AO} =$ சுழலிணை (+); திருப்புத்திறனளவு $2 \triangle OCA$ என்ற பரப்பளவாலும் குறிப்பிடப்படும்.

$\therefore OB + BC + CO + OA + AB + BO + OC + CA + AO$
$= \overline{BC} + \overline{AB} + \overline{CA}$

= சுழலிணை (+) ; திருப்புத்திறனளவு $2 \triangle ABC$ என்ற பரப்பளவால் குறிக்கப்படும்.

ஒவ்வொன்றிலும் பாதி எடுத்தால், வேண்டியது நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 7

1. $ABCD$ ஒரு சம சதுரம்; AB, CD வழியாக 2 கி.கிராம் விசைகளும் AD, CB வழியாக 5, 5 கி.கி. விசைகளும் செயற்படுகின்றன; சதுரத்தின் பக்கம் 1 மீட்டர் என்றால், அசைவற்ற நிலை ஏற்பட 3கி. கி—மீட்டர் திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை செயற்பட வேண்டும் என நிறுவுக.

2. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம்; AB, CB, DE FE வழியாக 5, 11, 5, 11 கி.கிராம் விசைகள் செயற்படுகின்றன. 6 கி.கிராம், 6 கி.கி. விசைகள் CD, FA வழியாக செயற்படின், அசைவற்ற நிலை ஏற்படுமென நிறுவுக.

3. BC, CA, AB என்ற ஒரு முக்கோண பக்கங்களில் உள்ள புள்ளிகள் D, E, F என்பவை, அந்த அந்த பக்கங்களை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன; $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிப்பிடப்பட்ட விசைகள் செயற்படின் அவையாவும் $2\,\dfrac{n-m}{n+m}S$ என்ற அளவு திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யப்படலாமென நிறுவுக. அம்முக்கோணத்தின் பரப்பளவு S.

4. $ABCD$ என்பது ஒரு நாற்கரம்; $p\,\overline{AB}$, $q\,\overline{BC}$, $r\,\overline{CD}$, $s\,\overline{DA}$ என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அந் நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி O; அவ்விசைகள் யாவும் ஒரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யப்படலாமெனின் $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{q-r}{s-p}$ எனவும், $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{r-s}{p-q}$ எனவும் நிறுவுக.

5. ABC ஒரு சம பக்க முக்கோணம்; பக்கம் a. D, E, F என்ற புள்ளிகள் BC, CA, AB மேல் இருந்து அப்பக்கங்களை $n : 1$

என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன. அப்புள்ளிகளில் முறையே அவ்வப்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாக P, P, P என்ற விசைகள் செயற்படின், அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு $\frac{3(n-1)}{2(n+1)} Pa$ என்ற அளவுள்ள திருப்புத்திறன் பெற்ற சுழலிணைக்குச் சமம் என நிறுவுக.

6. ஒரு நாற்கரம் $ABCD$-ன் பக்கங்களின் மேல் செயற்படும் $a\,\overline{AB}$, $b\,\overline{BC}$, $a\,\overline{CD}$, $b\,\overline{DA}$ என்ற விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாயின் $a=b$ அல்லது $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.

7. $ABCD$, $PQRS$ என்பவை ஒரு தளத்தமைந்த இரு இணைகரங்கள். $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$, $\overline{DS}$ என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணையென நிறுவுக; அதன் திருப்புத்திறன் இரு இணைகரங்களின் பரப்புக்களுக்குள்ள வித்தியாச அளவுடையதென நிறுவுக.

8. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மேல் $p\,\overline{AB}$, $q\,\overline{BC}$, $r\,\overline{CA}$ என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணையாயின், $p\,AB : q\,BC : r\,CA = \sin C : \sin A : \sin B$ என நிறுவுக.

9. ஒரு முக்கோணம் ABC-ன் முனைகள் A, B, C வழியாகச் செயற்படும் P, Q, R என்ற விசைகள் அந்தந்த முனைகளின் அம் முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டத்தின் தொடுவரைகளின் திசைகளில் செயற்படுகின்றன; அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணையாயின்,

$$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \text{ என நிறுவுக.}$$

10. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். பக்கம் 2 மீட்டர்; AB, BC, CD, DE, EF வழியாக முறையே 5, 5, 2, 3, 7 கி.கிராம் விசைகள் செயற்படின், அவை யாவும் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென நிறுவுக; சுழலிணை அளவு $22\sqrt{3}$ கி.கி—மீட்டர் என நிறுவுக.

11. ஒரு விசைக்கூட்டின் x அச்சுப்பிரிவு விசை 40 கி. கிராம்; y அச்சுப்பிரிவு விசை 64 கி.கிராம்; திருப்புத்திறன் 108 கி.—மீட்டர் அளவுள்ள ஒரு சுழலிணை. இவற்றினை ஒரே விசையாக மாற்றினால், (கூட்டு) விளைவு விசை x அச்சை ஆய ஆதியிலிருந்து 1.8 மீட்டர் தொலையில் வெட்டுமென நிறுவுக.

8. ஒரு தள விசைகள் - கட்டிறுக்கப் பொருள்மேல் செயற்படுவன

(Coplanar forces acting on a rigid body)

8-1. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படும் விசைகள் யாவும் ஒரே தளத்தின்மேல் செயற்படின், அவை ஒருதள விசைகளெனப்படும்.

(1) முதலில் ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் (i) இரண்டு (ii) இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகளைப் பற்றிப் பார்த்தோம். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணும் முறைகளையும், பின்னர் அவ்விசைகள் செயற்படுங்கால் பொருள் அசைவற்று இருக்குமாயின், அவ்வசைவற்ற நிலைக்குப் போதுமான, தேவையான கட்டுப்பாடுகள் என்னவென்றும் கண்டோம்.

(2) பின்னர் இணைவிசைகள் (i) இரண்டு (ii) இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகளைப் பற்றிப் பார்த்தோம். அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணும் முறைகளைப் பார்த்தோம். ஆனால், இரு விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிர்ச்சம இணை விசைகளாயின், அல்லது கடைசியாக அவ்விதமான இரு விசைகளாய்ச் செயற்படின், அவற்றிற்குக் (கூட்டு) விளைவு விசை காணும் முறை முறிவடைவதையும், அந்த நிலையில் அவையிரண்டும் இரட்டை அல்லது சுழலிணை என்ற சிறப்பமைப்பு பெறுவதையும் பார்த்தோம்.

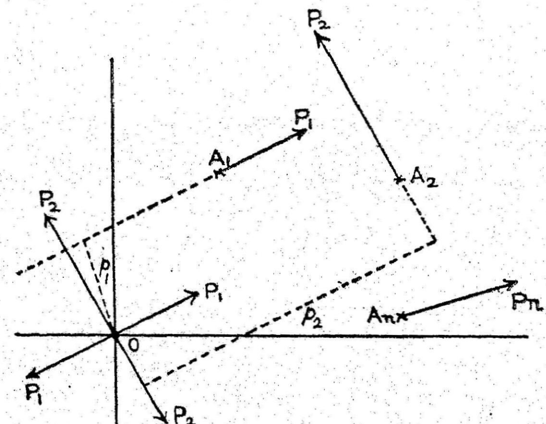
(3) பின்னர் ஒரு விசையின் திருப்புத் திறனெனில் என்னவென்றும், அத்திறனை அளவிடும் முறைகளையும், அத்திறன்களுக்குரிய மரபுக் குறிகளையும் பார்த்தோம். இந்த அடிப்

படையில், பல இணை விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும்போது, அப்பொருள் அசைவற்ற நிலையி லிருப்பின் உள்ள கட்டுப்பாடுகளையும் பார்த்தோம்.

(4) பின்னர் சிறப்பமைப்பான சுழலிணைகள் பற்றிய சில தேற்றங்கள் நிறுவப்பட்டன.

8-2. இப்போது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு தளத்தில் பல புள்ளிகளில் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படுமாயின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவையும், அசை வற்ற நிலைக்குத் தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடு களையும் பார்ப்போம்.

8-2·1. **தேற்றம் 1 : ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல், ஒரு தளத்தில் பல விசைகள் செயற்படின், அவை யாவற்றினையும் (விளைவு மாறுது) அத்தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் செயற்படும் ஒரு விசையாலும் ஒரு சுழலிணை யாலும் ஈடு செய்யலாம்.**



படம் 8-2.1.

(படம் 8-2·1.)-ல் காட்டியபடி ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் A_1 என்ற இடத்தில் P_1 என்ற விசையும், A_2 என்ற இடத்தில் P_2 என்ற விசையும்............A_n என்ற இடத்தில் P_n என்ற விசையும் (n விசைகள் ஒரு தளத்தில் பல புள்ளிகளில்) செயற்படுவதாகக் கொள்க. O என்பது அத் தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியெனக் கொள்க.

இப்போது பகுதி 7 தேற்றம் 7-ன்படி A_1–ல் செயற்படும் P_1 என்ற விசையை, O-ல் அதே திசையில் செயற்படும் P_1 என்ற விசையாலும் $P_1 \cdot p_1$ என்ற அளவு திருப்புத்திறன் பெற்ற (P_1, P_1) என்ற ஒரு சுழலிணையலும் ஈடு செய்யலாம். குறி $(-)$.

p_1 என்பது படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கும் (P_1, P_1) என்ற இரு எதிரெதிர் சம இணை விசைகளாலாய சுழலிணையின் கரம்.

அவ்வாறே A_2–ல் செயற்படும் P_2 என்ற விசையை, O-ல் அதே திசையிற் செயற்படும் P_2 என்ற விசையாலும், $P_2 p_2$ என்ற திருப்புத்திறன் பெற்ற (P_2, P_2) என்ற ஒரு சுழலிணையாலும் ஈடு செய்யலாம். குறி $(+)$.

இவ்வாறே $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ என்ற விசைகளை,

O–ல் அதே திசைகளில் செயற்படும் $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ என்ற விசைகளாலும்,

$-P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots\ldots$ என்ற இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் பெற்ற n சுழலிணைகளாலும் ஈடு செய்யலாம்.

O-ல் செயற்படும் $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ என்ற விசைகளுக்கு 4·8.-ல் விளக்கியபடி ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம்.

உடனிருக்கும் சுழலிணைகள் யாவற்றையும் அவற்றின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் பெற்ற ஒரே ஒரு சுழலிணையால் ஈடு செய்யலாம்.

O என்பது, விசைகள் செயற்படும் தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியாதலின், பல புள்ளிகளில் வெவ்வேறு திசைகளில் செயற்படும் விசைகளை,

(i) O–ல் செயற்படும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையோடு
(ii) ஒரு சுழலிணையும் சேர்த்து ஈடு செய்யலாம்.

எனவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

இது பொதுவாக உருவாகக்கூடிய நிலை. அல்லது, ஒரு புள்ளியை நாம் எடுத்துக்கொள்ளும்போது, (i) (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாகி, இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன்

பூச்சியமாகாமலிருக்கலாம் அல்லது (ii) (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாகாமல் இயற்கூட்டுத் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகலாம். அல்லது (iii) இரண்டும் ஒருங்கே பூச்சியமாகலாம். அல்லது (iv) இரண்டுமே பூச்சியமாகாமலிருக்கலாம்.

நிலை (i)-ல், அக் கட்டிறுக்கப் பொருள் நகராது; சுழலும்.

நிலை (ii)-ல், சுழலாது, நகரும்.

நிலை (iii)-ல் நகரவும் செய்யாது, சுழலவும் செய்யாது, அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

நிலை (iv)-ல் பகுதி 7-ல் தேற்றம் 8-ன் படி ஒரு விசையையும், ஒரு சுழலிணையையும் மற்றொரு புள்ளியில் ஒரு விசையாக மட்டுமே ஈடு செய்யக் கூடுமாதலின், பொருள் நகரும், சுழலாது.

எனவே, இந் நான்கு நிலைகளையும் தொகுத்துப் பார்த்தால், பல விசைகள் ஒரு தளத்தில் ஒரு கட்டிறுக்கப்பொருளின் மேல் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவை

ஒரு புள்ளியில் செயற்படும் ஒரு விசை கொண்டு அல்லது ஒரு சுழலிணை கொண்டு ஈடு செய்ய முடியும் எனத் தெரிகிறது.

8·2.1.1. இவ் வுண்மைகள் மிக முக்கியமானவை யாதலின், இத் தேற்றத்தின் முக்கியமான கிளைத் தேற்றங்களாகப் பின் வரும் முடிவுகளைக் கூறலாம்:

கிளைத் தேற்றம் (i) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் பல விசைகள் செயற்படின், அவை யாவற்றையும் ஒரு குறிப்பிடக் கூடிய புள்ளியில் அதே தளத்தில் செயற்படும் ஒரு விசை கொண்டு அல்லது அளவிடக் கூடிய திருப்புத்திறன் பெற்ற ஒரு சுழலிணை கொண்டு ஈடு செய்யலாம்; எனவே, அப் பொருள் நகரும் அல்லது சுழலும்.

கிளைத் தேற்றம் (2) : கூட்டு விளைவு விசையும் சுழலிணையின் திருப்புத்திறனும் ஒருங்கே பூச்சியமாயின், அவ் விசைகள் செயற்படும் விளைவாக, அப் பொருள் அசைவற்ற நிலை பெறும்.

8-2.1.2. **முக்கிய குறிப்புகள் :** (1) கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் யாவும் நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் ஒரு புள்ளியில் செயற்படின், பெறப்படும் (கூட்டு) விளைவு விசையே சுழலிணை

யோடு சேர்ந்து மற்றொரு வசதியான புள்ளியில் ஈடு செய்யும் விசையாவதைக் காண்க.

(2) எடுத்துக் கொண்ட புள்ளியை யொட்டிக் கொடுக்கப் பட்ட விசைகள் யாவற்றிற்கும் திருப்புத்திறன் கண்டு, அவற் றின் இயற் கூட்டுத் தொகை யறிந்தால், அதுவே ஈடு செய்யும் விசையோடு சேர்ந்து ஈடு செய்யும் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் ஆவதையும் காண்க.

[(P_1, P_1) என்ற விசைகளாலாய சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $= P_1 p_1$; இங்கு p_1 என்பது O-விருந்து A-ல் செய்யபடும் P-க்கு வரையப்படும் குத்துக் கோட்டின் நீளமாதலால், Oஐ ஒட்டி A-ல் செயல்படும் P_1-ன் திருப்புத்திறன் $= P_1 p_1$. இது எல்லாச் சுழலிணைகளுக்கும் பொருந்தும்.]

8-2·2. **மாற்றுத் தெரிப்பு :** P_1, $P_2 ... P_n$ என்ற n விசைகள் ஒரு தளத்தில் பல புள்ளிகளில் செயல்படுகின்றன.

(i) P_1, P_2 என்ற விசைகள் சந்திக்குமாயின் இணைகர விதிப்படி அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம்; அல்லது (ii) அவை இணை விசைகளாயிருந்து ஒரே திசையிலி ருந்தாலும், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம். (iii) மாறுபட்ட திசைகளில் சமமாயில்லாதிருப்பின் அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணலாம். ஆனால், (iv) நேரெதிர் சம இணை விசைகளாயிருப்பின் அவை குறிப்பிட்ட திசையில் அள விடக் கூடிய திருப்புத்திறன் பெற்ற ஒரு சுழலிணையாகும்.

(i), (ii), (iii) முறைகளில் வசதியானதைக் கொண்டு P_1, P_2-ன் (கூட்டு) விளைவு R_1 என்ற விசை காண்க. இவ்வாறே R_1 உடன் சுழலிணை மட்டுமாகாத விசைகளை ஒன்றன் பின்னுக எடுத்துக் கொண்டு (கூட்டு) விளைவு விசை கண்டு கொண்டே செல்லலாம். இம் முறையில் படிப்படியாக (கூட்டு) விளைவு விசைகள் கண்டு கொண்டே போகலாம். கடைசியில் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை வரும். (iv) என்ற நிலைப்படி, சில விசைகள் அமைந்திருப்பின், அந்தந்தச் சுழலிணைகளின் திருப் புத்திறன்களையும் கண்டு சுழலிணைகள் யாவற்றின் (கூட்டு) விளைவுச் சுழலிணையைக் காணலாம்.

எனவே, பொதுவாகக் கடைசியில் நாம் எடுத்துக்கொண்ட எல்லா ஒரு தள விசைகளையும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையோடு ஒரு சுழலிணையைச் சேர்த்து ஈடு செய்ய முடியும். இதுவே தேற்றம்.

ஆனால், இங்கும் கடைசியாக

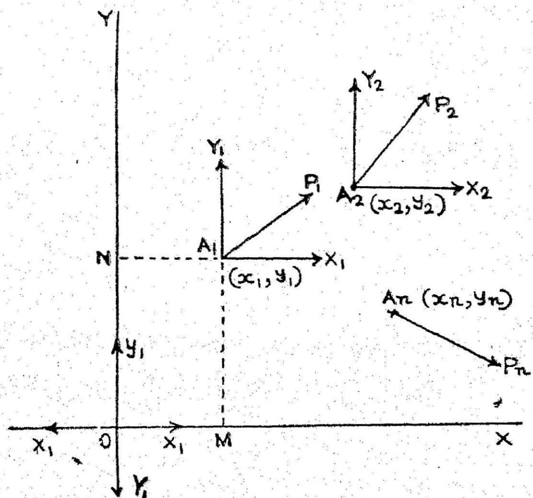
(α) ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை மட்டும் அல்லது

(β) ஒரு சுழலிணை மட்டும் வரலாம்.

அல்லது (r) (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாகவும், சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகவும் வரலாம். இவை சிறப்பான நிலைகளாகும்.

8-2·3. **மற்றுமொரு முறையில் தெரிப்பு : இயல் வடிவ கணித முறை** (Analytical method):

தேற்றம் (1)-ஐ, இயல் வடிவ கணித முறை துணைக் கொண்டுபார்ப்போம்.



படம் 8-2.3.

OX, OY என்ற செங்குத்து அச்சுக்கள் O என்னும் ஒரு புள்ளி வழியாக, விசைகள் செயற்படுற் தளத்தில் எடுத்துக் கொள்க. P_1 செயற்படும் இடம் A_1; ஆயத் தொலை (x_1, y_1). P_2 செயற்படும் இடம் A_2; ஆயத் தொலை (x_2, y_2).................... P_n செயற்படும் இடம் A_n; ஆயத் தொலை $(x_n\ y_n)$. A_1 வழியாக OX, OY-க்கு இணை கோடுகள் வரைக. OX-க்கு இணையான கோட்டில் P_1-ன் பிரித்த பகுதி விசை X_1 எனவும். OY-க்கு இணையான கோட்டில் P_1-ன் பிரித்த பகுதி Y_1 எனவும் காண்க.

A-ல் செயற்படும் $X_1 = O$-ன் வழியாக OX-ன் மேல் X_1 என்ற விசையோடு $-y_1 X_1$ என்ற அளவு திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை.

A_1-ல் செயற்படும் $Y_1 = O$-ன் வழியாக OY-ன் மேல் Y_1 என்ற விசையோடு $+x_1 Y_1$ என்ற அளவு திருப்புத்திறன் கொண்ட சுழலிணை.

எனவே A_1-ல் செயற்படும் P_1 என்பது

$= OX$-ன் மேல் O-ல் செயற்படும் விசை X_1; OX-ன் மேல் O-ல் செயற்படும் விசை X_1; சுழலிணை $(x_1 Y_1 - y_1 x_1)$ என்ற மூன்றினுலும் ஈடு செய்யப்படுகிறது.

இவ்வாறே $P_2, P_3 \ldots P_n$ என்ற விசைகள் முறையே, O-ல் செயற்படும் $X_2, X_3, \ldots X_n$ என்ற விசைகளாலும், O-ல் செயற்படும் $Y_2, Y_3, \ldots Y_n$ என்ற விசைகளாலும், திருப்புத்திறன்கள் $(x_2 Y_2 - y_2 X_2)$, $(x_3 Y_3 - y_3 X_3) \ldots$ குறிக்கும் சுழலிணைகளாலும் ஒருங்கே ஈடு செய்யப்பட்டுகின்றன.

எல்லா விசைகளும் இப்போது ஈடு செய்யப்பட்டு நாம் பெறுவது,

O-ல் OX-ன் மேல் $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = X$

O-ல் OY-ன் மேல் $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = Y$

சுழலிணைகள் திருப்புத்திறன் $\sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1) = G$

X, Y என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ எனப் பெறலாம். அது செயற்படும் திசை OX-க்கு 'θ' அளவு சாய்ந்திருக்கும்; $\tan\theta = \frac{Y}{X}$ என்பது 'θ' இனைத் தரும். எனவே, எல்லா விசைகளும்,

O என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியில் செயற்படும் R என்ற விசையாலும், OX, OY என்ற செங்குத் தச்சுகளைச் சார்ந்த ஆயத் தொலைகளை யொட்டி, திருப்புத்திறன் $G = \sum (x_1 Y_1 - y_1 X_1)$ என்ற சுழலிணையாலும் ஈடு செய்யப்படுகின்றன.

அல்லது அவ் விசைகளெல்லாம் O-ல் செயற்படும் R என்ற (கூட்டு) விளைவு விசையோடு திருப்புத்திறன் G-ம் சேர்ந்த அமைப்புக்குச் சமம்.

இது பொதுத் தேற்றம்.

சிறப்பாகப் பின்வரும் ஏதாவது ஒன்றும் நேரலாம்:

(i) $R \neq 0, \quad G = 0$

(ii) $R = 0; \quad G \pm 0$

(iii) $R = 0; \quad G = 0$

(iv) பொதுவாகப் பெறக் கூடிய $R \neq 0, \; G \neq 0$ கடைசியாகப் பெற்ற $R \pm 0, \; G \neq 0$ என்பது R என்ற மற்ரோர் இடத்தில் செயற்படும் விசையால் ஈடு செய்யப்படலாம்.

எனவே, நாம் பல விசைகளின் (கூட்டு) விளைவைத் தொகுத்துக் கூறுமிடத்து, அவையாவும்

(i) ஒரு விசை அல்லது (ii) ஒரு சுழலிணை அல்லது (iii) அசைவற்ற நிலை ($\bar{R} = 0, \; G = 0$-க்குரியது)–க்குச் சமமாக்கப் பட்டு நிற்கும்.

8–2.3·1. முக்கிய குறிப்புகள்:

(1) $G \neq 0$ எனக் கொள்வோம். $R = 0$ ஆக வேண்டுமாயின், X, Y இரண்டும் தனித்தனியே, ஒன்றை ஒன்று சாராமல் பூச்சியமாக வேண்டும். அப்போதுதான் $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ என்பது பூச்சியமாகும். ($X = \sum X_1 = 0; \; Y = \sum Y_1 = 0$). X என்பது OX-க்கு இணையான திசையில் $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ என்ற விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற்கூட்டல்; Y என்பது OY-க்கு இணையான திசையில் $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$ என்ற விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கூட்டல்.

எனவே, பின்வரும் உண்மை புலனாகும்:

ஒரு தளத்தில் வெவ்வேறு இடங்களில் பல விசைகள் செயற்படும்போது, அத்தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளி வழியாக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் ஆய அச்சுகள் எடுத்துக் கொண்டால், அந்த இரு திசைகளிலும் முன் கூறப் பட்ட விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கூட்டுத்தொகை, தனித்தனியே பூச்சியமானல், அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு ஒரு சுழலிணையாகப் பெறப்படும். $R = 0$ ஆக $X = 0, \; Y = 0$ என்பது தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடு என நாம் அறிவோம்.

(2) $R \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

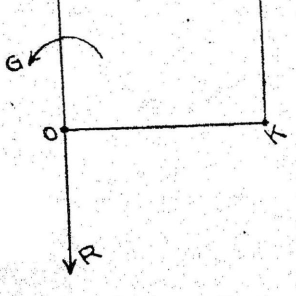
அப்போது $X \neq 0$ அல்லது $Y \neq 0$ அல்லது X, Y இரண்டுமே $\neq O$ என்ற நிலை உருவாகும்.

(3) $G \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

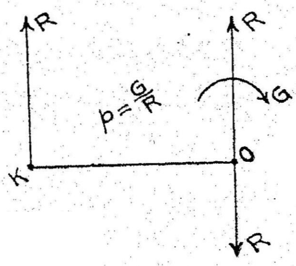
முன்னர் 8·2·1·2.-ல் விளக்கியபடி, G-ன் மதிப்பு 0 - என்ற புள்ளியை யொட்டி, அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை. $\left\{G = \sum (x_1 Y - y_1 X_1)\right\}$ $G \neq O$ எனவிருக்க வேண்டுமாயின், விசைகள் செயற்படும் தளத்தில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் அப் புள்ளிகளை யொட்டி விசைகளின் திருப்புத்திறன்களது இயற் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியாக இருக்க வேண்டும்.

(4) $G = 0$ ஆக இருக்க வேண்டுமாயின், தளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் அப் புள்ளியை யொட்டி, விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்,

(5) $R \neq O, G \neq 0$ எனில் இவற்றினை மற்றொரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் [படம் 8-2.3·1 (i), (ii) காண்க.] R என்ற விசையால் ஈடு செய்யலாம்.



படம் 8-2.3.1 (i)



படம் 8-2.3.1 (ii)

[படம் 8–2.3.1. (i)]–ல் O-ல் செயற்படும் R-ம் ↶ G-ம் சேர்ந்து

K–ல் செயல்படும் R-க்குச் சமம். $\left(OK = \frac{G}{R}\right)$ படம் 8–2 3.1. (ii)–ல் O-ல் செயற்படும் R-ம் $\circlearrowleft G$-ம் சேர்ந்து K-ல் செயற்படும் $\bar{R}$-க்குச் சமம். $\left(OK = \frac{G}{R}\right)$. $R \neq 0$ ஆகையால் $X \neq 0$, அல்லது $Y \neq 0$ அல்லது Y, Y இரண்டும் $\neq 0$ எனவிருக்கும்.

(6) $R = 0, G = 0$ என்ற இரண்டும் ஒருங்கே உண்மையாயின், மேலே (i)-ல் கண்ட கட்டுப்பாடும், (4)-ல் கண்ட கட்டுப்பாடும் ஒருங்கே அமைய வேண்டும். இது அசைவற்ற நிலையைத் தருவதால் இதை ஒரு தனித்தேற்றமாக இப்போது தருவோம்.

8-3. **தேற்றம் 2: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் விசைகள் செயற்படுமானல், அப்பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கத் தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடுகள் இரண்டு: அவை ஒருங்கே உண்மையாக வேண்டும்.**

(i) **ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான ஏதாகிலும் இரு திசைகளில் அவ்விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற்கூட்டுத்தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாக வேண்டும்.**

(ii) **அத்தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளியையொட்டி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களது இயற்கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக வேண்டும்.**

தேவையானது: (நிறுவன் முறை):

இத் தேற்றத்தை முறையாக நிறுவ வேண்டுமாயின், முதலில் தேற்றம் (1) ஐ நிறுவி செயற்படும் விசைகள் யாவும் கடைசியாக ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை R உடன் திருப்புத்திறன் G உடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென உறுதி செய்ய வேண்டும். பிறகு அக் கட்டிறுக்கப் பொருள் அசைவற்ற நிலையில் இருக்க வேண்டுமானல், $R = 0$ என்பதும் $G = 0$ என்பது தேவையெனத் தெரிகிறது. $R = 0$ ஆக வேண்டின், $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ ஆக வேண்டும். எனவே, $X = 0$, $Y = 0$ என்ற இரு கட்டுப்பாடுகளும் தனித்தனியே தேவைப்படும். மேலும், $G = 0$ ஆக வேண்டின், G-ன் அளவு ஏதாவதொரு புள்ளியையொட்டி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின்

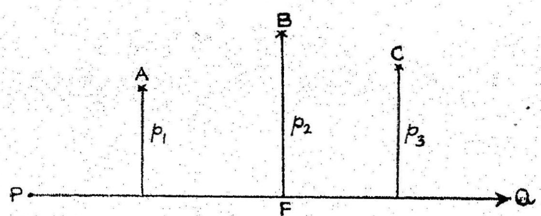
இயற் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாதலால், இரண்டாவது கட்டுப்பாடும் தேவைப்படும்.

போதுமானது (நிறுவன்முறை)

$X=0$; $Y=0$, $G=O$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, முதலில் $R=0$ எனப்பெறப்படுகிறது. ($\because R=\sqrt{X^2+Y^2}$) இரண்டாவது $G=0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், (கூட்டு) விளைவு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகிறது. ஆகவே, பொருளுக்கு நகர்ச்சியுமில்லை, சுழற்சியுமில்லை. எனவே, அசைவற்ற நிலை தொடர்கிறது.

8-4. **தேற்றம் 8: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல், ஒரு தளத்தில் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் விசைகள் செயற்படுங்கால், ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளையொட்டி அவ் விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் தனித்தனியே, ஒரே திசையும் அளவும் பெற்றிருப்பின், அவ் விசையமைப்பு, ஒரு சுழலிணைக்கு மட்டுமே சமமாகும்.**

A, B, C என ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளையெடுத்துக் கொள்க. இவ்விசையமைப்பு ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமில்லாதிருப்பின், அவ் வமைப்பு ஒரு விசைக்குச் சமமாயிருக்



படம் 8-4.

கும். அவ் விசை செயற்படும் கோடு PQ எனக் கொண்டால், A, B, C என ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளையொட்டி, அதன் திருப்புத்திறன்கள் சமமாக இருக்க முடியாதென்பதை (படம் 8-4)-ல் காண்க. இது நமது முதற்கொள்கைக்கு முரணாக விருப்பதால், (கூட்டு) விளைவு ஒரு விசையாக இருக்கமுடியாது. எனவே, வேறு மாற்று வழியில்லாது, அவ் விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம் என்பது பெறப்படுகிறது.

8–5. அசைவற்ற நிலைக்குரிய கட்டுப்பாடுகள்

பல விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் குறிப்பிட்ட இடங்களில் செயற்படும் போது, அவை யாவற்றையும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையாலோ அல்லது ஒரு சுழலிணையாலோ விளைவு மாருது ஈடு செய்யலாம் எனப் பார்த்தோம்.

அதில் சிறப்பாக அசைவற்ற நிலை ஏற்படுவதற்குரிய தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடுகளையும் நிறுவினேம். இத்தேற்றம் நிலையியலின் மையத் தேற்றம். பல கணக்குகளில் இது பயன்படுத்தப்படும். மற்றும், அசைவற்ற நிலைக்குரிய கட்டுப்பாடுகளை வேறு விதங்களில் கொடுக்கும் ஓரிரண்டு தேற்றங்களைப் பார்ப்போம்.

8-5.1. **தேற்றம் 4: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் பல விசைகள் செயற்படுங்கால், அத்தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளை யொட்டிப் பெறப்படும் திருப்புத்திறன்கள் தனித்தனியாகப் பூச்சியமாகுமானுல், அசைவற்ற நிலை ஏற்படும்.**

A,B,C என ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகள் கொள்க.

அப்புள்ளிகளை யொட்டிய திருப்புத்திறன்கள் தனித்தனியாகப் பூச்சியமாவதால், செயல்படும் விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகாது. எனவே, அவ்விசைகளுக்கு ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை மட்டுமே இருக்க முடியும். அக் (கூட்டு) விளைவு விசை F எனக் கொள்க.

A ஐ ஒட்டி, B ஐ யொட்டி, C ஐ யொட்டித் தனித்தனியே இக் (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகிறதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது [விசைகளின் இயற்கூட்டுத் திருப்புத்திறன் = (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் என்ற தேற்றப்படி]. எனவே, $F=0$ அல்லது F என்பது A வழியாகச் செல்கிறது. மேலும், $F=0$ அல்லது F என்பது B வழியாகச் செல்கிறது. $F=0$ அல்லது F என்பது C வழியாகச் செல்கிறது. F ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் செயற்படுமாதலாலும், A,B,C என்பவை ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத புள்ளிகளாதலாலும், F என்பது A,B,C வழியாகச் செல்ல இயலாது. எனவே, $F=0$ என்ற முடிவே பொருத்தமாகும். எனவே, அப்பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

8-5·2. **தேற்றம் 5: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் ஒரு தளத்தில் பல விசைகள் செயற்படுங்கால் அத்தளத்தில் எவையாகிலுமிரண்டு புள்ளிகளையொட்டி அவ் விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் தனித்தனியாகப் பூச்சியமாகி, அவ்விரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு அத்தளத்தில் செங்குத்தாகவுள்ள திசையல்லாது வேறெந்தத் திசையிலும் அவ் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமானல், அப்பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.**

எவையாகிலுமிரண்டு புள்ளிகளை யொட்டித் திருப்புத் திறன்கள் தனித் தனியாகப் பூச்சிய மாதலால், (கூட்டு) விளைவு ஒரு விசையாக மட்டுமே இருக்கலாமே தவிர, ஒரு சுழலிணை யாக இருக்க இயலாது.

அக் கூட்டு விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன் இரு புள்ளிகளை யொட்டிப் பூச்சியமாதலால், அவ் விசை அவ் விரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்ல வேண்டும் அல்லது அசைவற்ற நிலை ஏற்பட வேண்டும். முதற் கூறியபடி. அவ்விசை R அவ் விரு புள்ளிகள் வழியாகச் செயற்படுகிறதெனக் கொள்வோம்.

இப்போது AB-க்கு θ ($\neq 90°$) அளவு சாய்ந்துள்ள ஏதாவதொரு நேர்கோட்டில், R-ன் பிரித்த பகுதி $R \cos \theta$ ஆகும். ஆனல், $R \cos \theta = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆனல் $R \neq 0$. எனவே, $\cos \theta = 0$ அதாவது $\theta = 90°$. என்று கொள்கைக்கு முரண்பட்ட முடிவு வருகிறது. எனவே, $R = 0$ அல்லது பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

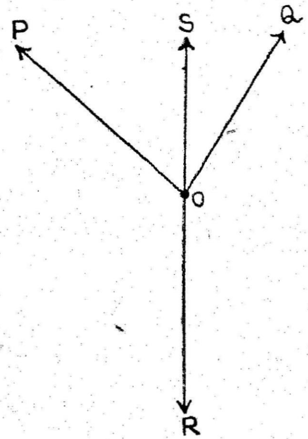
8-5·3. **மூன்று விசைத் தோற்றம்**

தேற்றம் 6: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் ஒரு தளத்தில் மூன்று விசைகள் செயற்படுங்கால், அசைவற்ற நிலை உண்டானல், அம் மூன்று விசைகளும் இணைகோடுகளில் செயற்படும் அல்லது அம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

விசைகள் செயற்படும் கோடுகள் இணைகோடுகளாயிருப்பின், முதல் பகுதி தானக நிறுவப்பட்டு விடுகிறது.

ஆனல், எவையேனும் இரு விசைகள் செயற்படும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், மூன்ருவது விசையும் அப் புள்ளியின் வழிச் செல்லும் என நிறுவவேண்டும்.

தெரிப்பு :- P, Q, R என்ற மூன்று விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் ஒரு தளத்தில் செயற்படுகின்றன. இரு விசைகள் P, Q என்பவை O-ல் சந்திக்கட்டும். அவற்றிற்கு ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை உண்டு. அது O வழியாகச் செல்லும் ஒரு விசையாகும் (இணைகர விதிப்படி). அவ்விசை S ஆனல், S-ம், மூன்ருவதாக எஞ்சியிருக்கும் R என்ற விசையும் அசைவற்ற நிலையை உருவாக்க வேண்டும். ஆகவே, R என்ற விசை O வழியாகச் செல்ல வேண்டும். (R, S இரண்டும் சமமாகி O வழியாக ஒரே நேர்கோட்டில் எதிரெதிர்த் திசைகளில் செயற்பட்டால்தான் அசைவற்ற நிலை உண்டாகும்.)



படம் 8-5.3

எனவே, P, Q, R என்ற விசைகள் இணைகோர்டுகளில் செயற்படவேண்டும், அல்லது அவை செயற்படும் நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தாக வேண்டும். இதுவும் ஒரு முக்கியமான தேற்றம்; மூன்று விசைகள் மட்டுமோ அல்லது கொடுக்கப்பட்ட விசைகளையெல்லாம் மூன்று விசைகளால் ஈடு செய்யக்கூடிய ஒரு நிலை ஏற்பட்டாலோ இத் தேற்றம் பெரிதும் பயன்படும்.

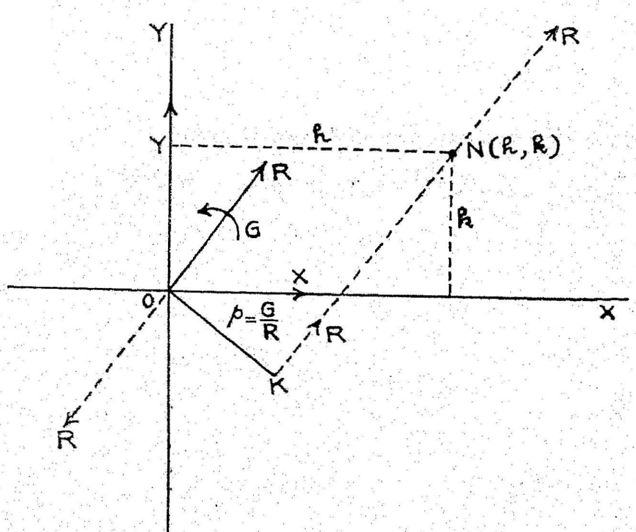
குறிப்பு : விசைகள் இணைகோடுகளில் செயல்படும் என்பதைத் தனியாக நிறுவ வேண்டியத் தேவையில்லை.

அப்படி நிறுவவேண்டுமானல், பின்வருமாறு நிறுவலாம்:

இரண்டு விசைகள் இணைகோடுகளில் செயற்படும்போது, அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையும், அவற்றிற்கு இணைகோட்டில் செயற்படும். இக் (கூட்டு) விளைவு விசையும் மூன்ருவது விசையும் அசைவற்ற நிலையைத் தருமானல், ஒரே நேர்கோட்டில், எதிரெதிர்த் திசைகளில் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே, மூன்ருவது விசை முதலிரண்டு கோடுகளுக்கு இணையான கோட்டில் செயற்பட வேண்டுமென நிறுவப்படுகிறது.

8-5·4. முன்னர் 8-2·1·1.-ல் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் பல புள்ளிகளில் விசைகள் செயற்படின், அவற்றிற்குச் சமமாக ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை அல்லது (கூட்டு) விளைவு சுழலிணை ஈடு செய்யலாம் என நிறுவினோம். அங்கு ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை மட்டுமே கிடைத்தால், OX, OY என்ற அச்சுகளையொட்டி, அவ் விசை செயற்படும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

8-5 4·1. **தேற்றம் 7: ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தின்மேல் பல புள்ளிகளில் விசைகள் செயற்படுங்கால், அவை யாவற்றையும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையால் ஈடு செய்ய முடியுமாயின், அவ்விசை செயற்படும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு** $G - xY + yX = 0$ **(இங்கு** OX, OY **என்ற ஆய அச்சுகளை யொட்டி செயற்படும் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற் கூட்டுத்தொகை முறையே** X, Y **எனவும்,** G **என்பது** O **ஐ யொட்டி அவ்விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் எனவும் கொள்ளப்படுகிறது)**



படம் 8-5.4.1

[படம் 8-2·3.1. (i), (ii) காண்க.] (கூட்டு) விளைவு விசை R என்பது K வழியாக O-ல் செயற்படும் $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோட்டில் செயற்படுகிறது.

K-ல் செயற்படும் R என்ற விசை $N(h, k)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லட்டும். N ஐ யொட்டி, விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். இங்குக் கூறப்படும் (கூட்டு) விளைவு திருப்புத்திறன்,

$$= G + Xk - Yh = 0$$

எனவே, (h, k)-ன் இயங்குவழி

$G - xY + yX = 0$ அல்லது

$xY - yX = G$ அல்லது $y = x\frac{Y}{X} - \frac{G}{X}$

எனவே, இக்கோட்டின் சரிவு (Gradient) $= \frac{Y}{X}$. எனவே, K வழியாகச் செல்லும் (கூட்டு) விளைவு விசை R-ன் சரிவும், O–வழியாகச் செல்லும் (கூட்டு) விளைவு விசை R-ன் சரிவும் சமமெனத் தெரிகிறது. அதாவது O-ல் R-ம், K-ல் R–ம் இணை கோடுகளில் செயற்படுவது சரிபார்க்கப்படுகிறது. எனவே, ஒரே ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசை மட்டுமே பெறப்படின், அது செயற்படும் கோட்டின் சமன்பாடு $G - xY + yX = 0$.

அல்லது $(xY - yX) = G$.

8-6. அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்

$X = 0$, $Y = 0$, $G = 0$ என்பவை அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகளெனப்படும். ஒரு கணக்கைச் செய்ய முற்படும் போது, பின்வரும் முறையைக் கையாளுவது நல்லது: பெரும்பாலும், எல்லாக் கணக்குகளும் இந்த முறைப்படி செய்ய, வரும்.

(1) முதலில் கொடுக்கப்பட்ட செய்திகளைக் காட்டும் ஒரு படம் வரைந்து கொள்க.

(2) கொடுக்கப்பட்ட விசைகளைப் படத்தில் இடங்குறித்து, திசை குறித்துக் கொள்க. ஒரு பொருள் மற்றொன்றைத் தொடும் இடத்தில் ஒருவினை (அழுத்தமும்)யும், ஓர் எதிர்வினையும் (எதிர் அழுத்தமும்) செயல்படும். எதிர்வினைத் திசையை மட்டும் குறித்துக் கொள்க. ஒரு கயிறு வரின் அதற்குரிய இழுவிசை கணக்கில் தோன்றும். அதையும் குறித்துக் கொள்க.

(3) ஒரு பொருளுக்கு எடையுண்டு; அது நேர்க்குத்தில் கீழே செயற்படும்; செயற்படும் இடம், அப் பொருளின் புவி

யீர்ப்பு மையம். ஒழுங்கான அல்லது சமச் சீரான பொருள் களுக்கு அப் புவியீர்ப்பு மையம் எளிதில் புலப்படும். சமச் சீரான பொருளில்லையானால், புவியீர்ப்பு மையம் காண வேண்டி யிருக்கும்; அல்லது கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

(3) ஒரு பொருள் கிடைத் தரையில் தொட்டுக் கொண்டு இருக்குமானல், தரையின் எதிர் விசை நேர்க் குத்தில் செயற்படும்.

(5) ஓர் இலேசான கயிறு ஒரு வழ வழப்பான இராட்டை யின் மேல் செல்லுமானல், அதன் இரு பக்கங்களிலும் இழு விசை ஒரே மதிப்புடையதாயிருக்கும்.

(6) ஒரு வழவழப்பான வளையம் ஒரு கயிற்றின் மேல் நகர்ந்து செல்லுமானல், கயிற்றின் இரு பிரிவுகளிலும் இழுவிசை ஒன்றேதான்.

(7) ஒரு கயிற்றின் மையத்தில் ஓர் எடையைக் கட்டித் தொங்க விட்டால், அக் கயிற்றின் இரு சம பகுதிகளிலும் இழு விசை ஒன்றேதான்; ஆனல், மையத்திலல்லாமல் வேறு எங்காவது கட்டித் தொங்க விட்டால், இரு பகுதிகளிலும் இழு விசை மாறும்.

(8) ஒரு வழவழப்பான வளையமானது ஒரு கழி, கம்பியின் மேல் நகரும்போது, வளையம் கழியை அழுத்தும்; எனவே, கழியின் எதிர்வினையாக கழிக்குச் செங்குத்தான திசையில் எதிர்விசை செயற்படும்.

(9) ஒரு கீல் அல்லது இணைப்பில் (joint) எதிர் விசை எப்படி யிருக்குமென்று சொல்ல முடியாது. ஏதோ ஒரு திசையில், ஏதோ ஓர் அளவோடு, அவ்வெதிர் விசை செயற் படும். எனவே, $G=0$ என்ற திருப்புத்திறன் சமன்பாடு எழுத, அப் புள்ளியை (கீல் அல்லது இணைப்பு) யொட்டித் திருப்புத் திறன் கணக்கிட்டால், அறியாத திசையில் அறியாததொரு விசையைத் தவிர்த்து சமன்பாடு பெறலாம்.

(10) சில இணைப்புகளில், அவ்விணைப்பின் மையம் வழியாக எதிர்வினை செயற்படும்.

(11) இன்னும் கணக்கில் கொடுத்திருக்கிற செய்திகளை யொட்டி, வடிவ கணிதத் தொடர்புகள் நமக்குக் கிடைக்கலாம்.

அவற்றையும் தேவைப்படும் முறையில் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும்.

(12) சில இடங்களில் 3–5.-ல் நிறுவப்பட்ட கோண கணிதத் தொடர்பு பயன்படலாம்.

கணக்குகளில் படம், படத்தில் சரியான புள்ளிகளில் சரியான திசைகளில் விசைகளைக் குறித்தல் இரண்டும், கால் பங்கு கணக்குப் போடுவதற்குச் சமானமாகும். ஆகவே, இவ்விரண்டும் முதற்படி, முக்கியமானபடி; இதைத் தாண்டினால் மட்டுமே, கணக்கினைப் போடும் வழியும், வகையும் புலப்படும்.

8-6.1. **மேற்கூறியவற்றிற்கு மேல், கணக்கைச் செய்யும் முறை – (பொதுவானது)**

நிலையியலில் பல விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படுவதால், அசைவற்ற நிலை ஏற்படும் கணக்குகள் பெரும்பாலும் வரும். விசைகள் சில கொடுக்கப்பட்டிரா; சில கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். ஆனால், படம் வரைந்து தெரிந்த, தெரியாத விசைகளையெல்லாம் இடங் குறித்து திசை குறித்து விட வேண்டும். அசைவற்ற நிலையெனின் :

(*a*) மூன்று விசைகள் அல்லது மூன்று விசைகளாகமாற்றிக் கொணரக் கூடிய விசைகள் மட்டுமே செயற்படும் போது, அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும், அல்லது இணைகோடுகளில் செயற்படும் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த முடியுமா எனச் சோதிக்க வேண்டும்; மற்றும், வடிவ கணிதப் பண்புகள் எங்கெங்குத் தோன்றுகின்றன வென்பதையும் காண வேண்டும். பொதுவாக இவற்றினை நாம் தேவைக்குத் தக்கபடி பயன்படுத்துவோமானால், விடை கிடைக்கும்.

(*b*) பல விசைகள் பல திசைகளில் செயற்படும் போது $X=0$, $Y=0$, $G=0$ என்ற சமன்பாடுகள் பயன்படும். மிக வசதியாக இரு செங்குத்தச்சுகளைக் கொண்டு x அச்சின் மேலும், y அச்சின் மேலும் செயற்படக் கூடிய விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளைத் தனித்தனியே உரிய குறியோடு (+அல்லது—) இயற் கூட்டல் செய்து பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க வேண்டும்.

பின்னர், $G=0$ என்ற சமன்பாடு எழுத, ஒரு வசதியான புள்ளியை யொட்டி திருப்புத்திறன்கள் காண வேண்டும்.

(i) மற்ற புள்ளிகளைவிட ஒரு புள்ளி வழியாக அதிகமான விசைகள் செயற்படுமானால், அப் புள்ளியை யொட்டி திருப்புத் திறன்கள் காண்பது வசதியானது. ஏனெனில், பல விசைகள் $G=0$ என்ற சமன்பாட்டில் இடம் பெறு.

(ii) திசையும் அளவும் தெரியாத ஒரு விசை செல்லும் வழி யாகத் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு காண்பது, அவ் விசையைச் சமன்பாட்டினின்றும் விலக்கி விடுமாதலால், அந்தத் தெரியாத விசை நீக்கப்படுகிறது. கீல்கள், இணைப்புகள் வழியாகச் செயற்படும் விசைகள் இவ்விதமாய் அமைவதால், அவ்விடங் களை ஒட்டித் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு எழுதுதல் நலம்.

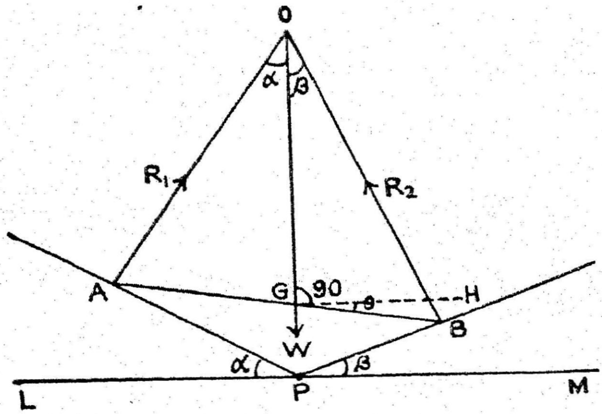
மேற்கூறியவை யாவும் எளிய வழிகாட்டிகளே யொழிய, இம் முறைகளையே நாம் கையாள வேண்டுமென்ற இன்றியமை யாமையில்லை. பல கணக்குகள் செய்து, கிடைக்கும் அனுப வத்தால் மட்டுமே நமக்கு எளிதான, வசதியான முறைகள் புலப்படும்; கைவரப் பெறும்.

கூடிய மட்டும் பல எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் செய்து காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றை மறுபடியும் ஒருமுறை புத்தகத்தை மூடிவிட்டுச் செய்து பார்த்தல், நல்ல பயிற்சி தரும். எனினும், எளிதில் வழிக்குவராத, இடங் கொடுக்காமல் இடர்பாடுதரும் கணக்குகளும் உண்டு. அவற்றைக் கண்டு அஞ்சற்க.

8–7. **எடுத்துக்காட்டு 1 :** ஒரு சீரான கனக்கழி AB (எடை W), α, β சாய்வுள்ள இரு வழ வழப்பான சாய்தளங் முளின் மேல் (படம் 8-7·1.)-ல் காட்டியபடி அசைவற்று இருக் கிறது. அந் நிலையில் அது கிடைக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் என்ன? சாய்தளங்களின் எதிர்வினைகள் யாவை?

AB என்ற கழியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையம் G-ல் இருக்கிறது. அதன் வழியாகச் செங்குத்தாக எடை W செயற் படுகிறது. A என்ற முனையும் B என்ற முனையும் சாய்தளங்களை அழுத்துவதால், A-லும் B-லும் அந்தந்தச் சாய்தளங்களுக்கு வரையக்கூடிய குத்துக்கோடுகள் வழியாக முறையே R_1, R_2 என்ற எதிர்வினைகள் செயற்படுகின்றன. வேறெந்த விசை களும் இங்குச் செயற்படுவதில்லை. எனவே R_1, R_2 W என்ற மூன்று விசைகள் அந்தக் கழியின் மேல் செயற்பட்டுக் கழி அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. எனவே, மூன்று விசைகள் தேற்றப்படி (8-5·3) அவை இணை கோடுகளில் செயற்பட

வேண்டும்; அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். அவை இணைகோடுகளில் செயற்படவில்லை என்பது பார்த்தால்



படம் 8-7.1

தெரிகிறது. எனவே, R_1, R_2 இரண்டும் O-ல் சந்தித்தால், OG என்ற கோடு செங்குத்தாக இருக்க வேண்டிய கட்டுப்பாடு பெறப்படுகிறது; OG என்ற செங்குத்துக் கோடுதான் எடை W செயற்படும் கோடாக இருந்தாக வேண்டும். எனவே, விசைகளைப்பற்றி ஒருவாறு தெரிந்து கொண்டோம்.

வடிவ கணித, கோண கணித உண்மைகள்

G வழியாக GH என்ற கிடைக்கோடு வரைந்து, HGB என்ற கோணத்தைத்தான் நாம் காண வேண்டும்.

$\angle HGB = \theta$ எனக் கொண்டு, அதன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$\angle OGH = 90°$ எனத் தெரிகிறது. (OG செங்குத்துக்கோடு, GH கிடைக்கோடு)

$\therefore \quad \angle OGB = 90° + \theta$

LPM கிடைக்கோடு

சாய்தளம் AP-க்கு $\angle APL = \alpha$

அவ்வாறே $\angle BPM = \beta$

வடிவ கணிதத் தேற்றங்கள்படி, $\angle AOG = \alpha$

$\angle BOG = \beta$

ஏனெனில், $AO \perp AP$; $OG \perp LPM$; $BO \perp BP$. (இரு கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட கோணம், அவ்விரு கோடுகளுக்குரிய குத்துக் கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமம் என்ற தேற்றம், இதை நிறுவும்)

இப்போது Δ AOB–ல் வடிவ கணிதத் தேற்றம் 3-5-ல் பயன் படுத்தப்படின் $(AG+GP) \cot(90+\theta) = AG \cot \alpha - GB \cot \beta$

ஆனால், $AG = GB$

$$\therefore \quad 2 \cot(90+\theta) = \cot \alpha - \cot \beta$$

$$2 \tan \theta = \cot \beta - \cot \alpha$$

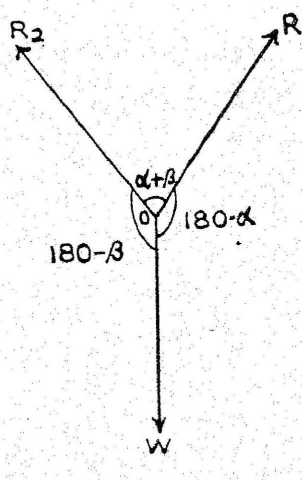
என்ற சமன்பாட்டால் அக்கழி கிடைக் கோட்டிற்கு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் கிடைக்கிறது. பிற்பகுதி முழுவதும் வடிவ கணித, கோண கணித வழியாகப் பெறப்பட்டது காண்க. R_1, R_2-ன் மதிப்புகளைக் காண O என்ற இடத்தில் அசைவற்ற நிலையை ஏற்படுத்திச் செயற்படும் R_1, R_2, W என்ற விசைகளுக்கு உரிய முறையில் இலாமித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, W–ன் அளவாக R_1, R_2 காண்க. (படம் 8-7·1·1)-ல் இது தனியாகக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

$$\frac{R_1}{\sin \beta} = \frac{R_2}{\sin \alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{W \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$R_2 = \frac{W \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

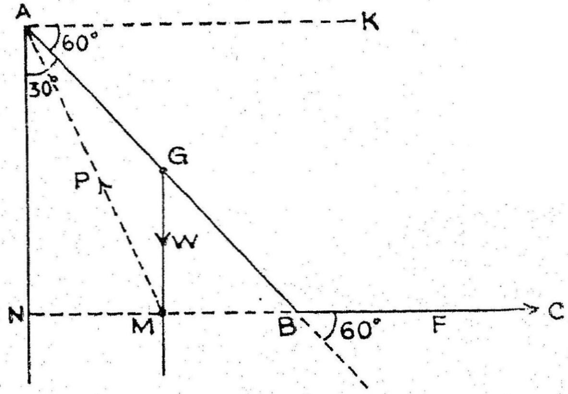
என R_1, R_2 இரண்டும் கணிக்கப்படுகின்றன.



படம் 8-7.1.1.

எடுத்துக் காட்டு 2 : AB என்ற ஒரு சீரான கனக் கழி (எடை W) A என்ற கீலில் இணைக்கப்பட்டு Aஐ மையங் கொண்டு சுழல முடியும். B–ல் செயற்படும் ஒரு கிடைக்கோட்டு விசை F, அக்கழியை இழுத்து கிடைக் கோட்டிற்கு $60°$ சாய்வில் பிடித்து நிறுத்துகிறது. F-ன் அளவையும், கீலில் செயற்படும் எதிர்வினையின் திசை, அளவு இரண்டினையும் காண்க.

(படம் 8-7.2)-ல் AB என்பது கனக்கழி. G அதன் (மையம்) புவியீர்ப்பு மையம்.



படம். 8-7.2.

G வழியாக செங்குத்தாக $\underline{W}$ செயற்படுகிறது.

B-ல் ஒரு கிடைக்கோட்டு விசை F செயற்பட்டு ABஐ இழுத்து நிறுத்தியிருக்கிறது. AK கிடைக்கோடாயின், $\angle BAK = 60°$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. A என்ற கீலில் ஓர் எதிர் வினை P செயற்படுகிறது. G-ல் W என்ற விசையும், B-ல் F என்ற கிடைக்கோட்டு விசையும், A-ல் திசையும், அளவும், நாமறியாத ஒரு எதிர்வினையும் செயற்பட்டு, கழி அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. F-ம் W-ம் M-ல் சந்திக்கட்டும். மூன்று விசைத் தேற்றப்படி A-ல் செயற்படும் எதிர்வினை AM என்ற நேர்கோட்டில் செயற்பட்டாக வேண்டும். இதுவரை விசைகளைக் கண்டோம்.

இப்போது வடிவ கணிதப் பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

$\angle BAN = 30°$

$\triangle ABN$-ல் $GM \parallel AN$

$AG = GB$ ஆகையால், $NM = MB$ ஆகும்.

AB-ன் நீளம் $2a$ எனக் கொண்டால்,

$$NB = 2\,a \sin 30° = a$$

$$AN = 2\,a \cos 30° = a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad NM = \tfrac{1}{2}\,NB = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \tan \angle NAM = \frac{NM}{AN} = \frac{a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

கீலில் செயற்படும் எதிர்வினை, செங்குத்துக் கோடான NA-க்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $NAM = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

எனவே, கீலில் செயற்படும் எதிர்வினையின் திசை கண்டு பிடிக்கப்பட்டது.

இப்போது அவ் விசையின் அளவு, M-ல் செயற்படும் விசைகள் P, W, F அசைவற்ற நிலையைத் தருவதால், இலாமியின் தேற்றப்படி பெறப்படும்

$$\frac{W}{\sin \angle AMN} = \frac{F}{\sin \angle AMG} = \frac{P}{\sin 90}$$

$$\therefore \quad P = W \operatorname{cosec} \angle AMN$$

$$F = P \sin \angle AMG$$

இப்போது $\triangle ANM$-ல்

$$\frac{AM}{NM} = \operatorname{cosec} \angle NAM$$

$$\therefore \quad AM = NM \operatorname{cosec} \angle NAM$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \cot^2 \angle NAM}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{1 + 12} \quad \left[\because \tan N\hat{A}M = \frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$$

$$= a\,\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin \angle AMN = \frac{AN}{AM} = \frac{a\sqrt{3}.2}{a\sqrt{13}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{2}{13}\sqrt{39}$$

$$\therefore \quad P = W \operatorname{cosec} \angle AMN$$

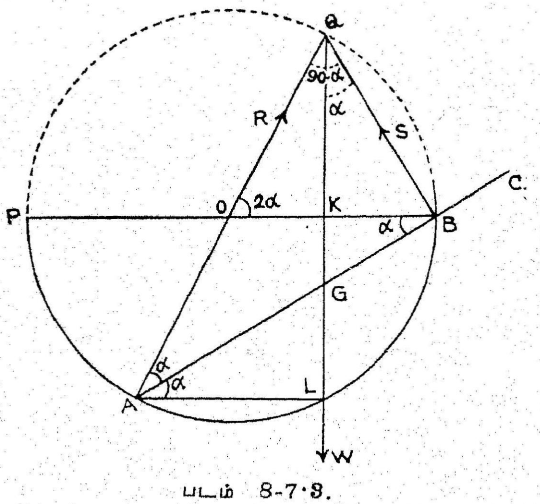
$$= \frac{W \times 13}{2\sqrt{39}}$$

$\angle AMG = \angle NAM$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்)

$$\therefore \quad F = P \sin \angle AMG$$
$$= P \sin \angle NAM$$
$$= \frac{W \times 13}{2\sqrt{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$
$$= \frac{W \times 13}{2\sqrt{3.13}} = \frac{W\sqrt{3}}{6}$$

எனவே, P, F–ன் அளவும் P-ன் திசையும் அளவிடப்பட்டிருக்கின்றன.

எடுத்துக் காட்டு 3 : 12 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு சீரான கழி ஒரு குழிவான (hollow) அரைக் கோளத்தினுள் வைக்கப்பட்டு ஒரு பகுதி வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது. அரைக் கோள மேல் வட்டம் கிடைத் தளத்திலிருக்கிறது. கோள ஆரம் $3\sqrt{3}$ செ. மீ. ஆனல், கழி 3 செ. மீ. வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்குமென நிறுவுக. கிடைக் கோட்டிற்குக் கழி சாய்ந்திருக்கும் கோணம் 30° எனவும், கழி உள்ளே அழுத்துமிடத்தில் எதிர் விசை, வரம்பில் எதிர்விசை இரண்டும் $\frac{W}{\sqrt{3}}$, $\frac{W}{\sqrt{3}}$ எனவும் நிறுவுக.



படம் 8-7·3.

(படம் 8-7.3)-ல் ABC என்ற கழி ஒரு குழிவான அரைக் கோளத்தில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. PB அரைக் கோளத்தில்

மேல் பக்க விட்டம். கழியின் BC என்ற பகுதி வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது.

விசைகள் : A-ல் குத்தெதிர் விசை; A-ல் கோளத்திற் குரிய தொடுவரைக்குக் குத்துக்கோடு AO என்ற ஆரம். எனவே, AO-ன் மேல் R என்ற எதிர்விசை செயற்படுகிறது.

B-ல் எதிர்விசை S, கழிக்குக் குத்துக்கோட்டு திசையில், அதாவது BQ-ல் செயற்படும். $ABQ = 90°$.

R–ம், S-ம் Q என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். மூன்ருவதாக, AC-ன் மையமாகிய G-ல் கீழே கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் எடை செயற்படும்.

எனவே, கழியின் மேல் செயற்படும் விசைகள் மூன்று. 'மூன்று விசை' தேற்றப்படி அவை இணைகோடுகளில் செயற்பட வேண்டும், அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

R, S என்ற எதிர்வினை Q-ல் சந்திப்பதால், QG என்ற கோடு கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக W என்ற எடை செயற்படும் கோடாக இருந்தாக வேண்டும். எனவே, R, S, W மூன்றும் Q என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும்.

வடிவ கணித உண்மைகள்

அரைக்கோள வெட்டு முகமான அரைவட்டம், PAB ஐ விரித்து முழு வட்டம் வரைக; மேல் அரைவட்டம் புள்ளியிட்ட கோடுகளால் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. $\angle BAQ = 90°$ ஆகையால், AO ஓர் ஆரத்தின் நீட்டலாதலாலும், AOQ அவ் வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாக இருக்க வேண்டும். எனவே, Q என்பது வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியாக அமையும் (ஒரு அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் ஒரு செங்கோணம்) QL என்பது கிடைத்தளத்திற்குச் செங்குத்தான படியாலும், $\angle ALQ = 90°$ (அரைவட்டத்திலுள்ள கோணம்) ஆதலாலும், AL என்பது A வழியாக உள்ள கிடைக்கோடாகும்.

$\angle BAL = \alpha$ எனக் கொள்க.

$\angle ALQ = 90°$ ஆகையால்,

$\angle AGL = 90 - \alpha = \angle QGB$ (நேரெதிர்க் கோணங்கள்)

$\therefore \angle KBG = \alpha$ ($\because \angle GKB = 90°$)

மேலும், $AO = OB$ ஆதலால்

$$\angle OAB = \angle OBA = \angle KBG = \alpha$$

∴ முக்கோணம் BOA-ல் வெளிக்கோணம் $BOQ = 2\alpha$

$AC = 12$ செ. மீ. எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. (கழி நீளம்)

அப்போது $AG = 6$ செ. மீ. $= GC$

∴ $\triangle AGL$-ல் $AL = 6 \cos \alpha$

$\triangle QAL$-ல் $AL = AQ \cos 2\alpha$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{3} \cos 2\alpha$$

$$= 6\sqrt{3} \cos 2\alpha$$

$$\therefore \; 6 \cos \alpha = 6\sqrt{3} \cos 2\alpha$$

அதாவது $\cos \alpha = \sqrt{3}\,(2\cos^2\alpha - 1)$

$$\therefore \; 2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}}$$

$= \frac{6}{4\sqrt{3}}$ அல்லது $\frac{-4}{4\sqrt{3}}$

குறைக் குறியுடைய தீர்வை விலக்கி விடுக.

$$\therefore \; \cos \alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ $\alpha = 30°$ எனப் பெறப்படும்.

$$AB = AQ \cos \alpha$$

$$\frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$= 9$ செ. மீ.

∴ வெளியே நீட்டியிருக்கும் பாகம் 3 செ. மீ., அதாவது கழியில் கால் பங்கு வெளியே நீட்டியிருக்கும்.

$\triangle ABQ$-ல் $\angle AQB = 90 - \alpha$

$\triangle KQB$-ல் $\angle KQB = \alpha$; $\therefore \angle RQK = 90 - \alpha - \alpha$

$= 90 - 2\alpha$

எனவே Q-ல் செயல்பட்டு அசைவற்ற நிலை தருகின்ற R, S, W என்ற விசைகளுக்கு இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தினுல்

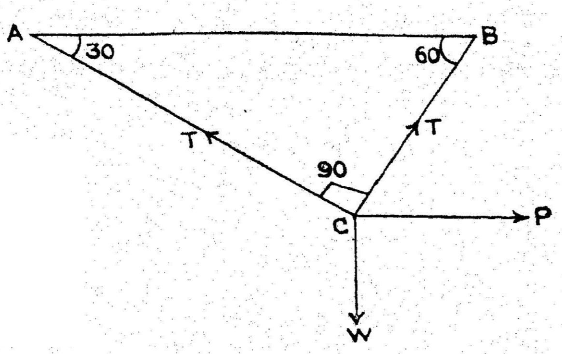
$$\frac{W}{\sin(90-\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin(90-\alpha-\alpha)}$$

$$\frac{W}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{S}{\cos 2\alpha}$$

$$R = W\tan\alpha = W\tan 30 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{W\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{W\cos 60}{\cos 30} = \frac{W.\ 1.2}{2.\ \sqrt{3}} = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு கயிற்றின் இருமுனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன; கயிற்றில் ஒரு வளையம் (W கி.கிராம்) நகரக்கூடும். அவ் வளையத்தில் மற்ருெரு கயிறு கட்டி, அது P என்ற விசையோடு கிடைக்கோட்டில்



படம் 8-7.4

இழுக்கப்பட்டு, வளையம் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. இந் நிலையில் கயிற்றின் பகுதிகள் கிடைக்கோட்டிற்கு 30°, 60° சாய் வில் இருப்பின், P-ன் அளவையும், முதல் கயிற்றின் இழுவிசை யையும் கணக்கிடுக.

(படம் 8-7.4.)-ல் விசைகளும் மற்ற செய்திகளும் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. C-வளையம். விசைகள் யாவும் ஒரே புள்ளி C-ல் செயற்படுவதாலும், அசைவற்ற நிலையிருப்பதாலும்

$X = 0$, $Y = 0$ என்ற இரு கட்டுப்பாடுகள் மட்டுமே போதுமானது.

P செயற்படும் திசை x அச்சு எனவும், W செயற்படும் திசை y அச்சு எனவும் கொண்டால்,

$$0 = X = P + T\cos 60 - T\cos 30 \qquad \text{......(1)}$$

$$0 = Y = W - T\sin 60 - T\sin 30 \qquad \text{......(2)}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

எனவே, $P = T\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$$W = T\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$\therefore T = \frac{2W}{\sqrt{3}+1}$$

$= W(\sqrt{3}-1) =$ இழுவிசை

$$P = \frac{W(\sqrt{3}-1)^2}{2}$$

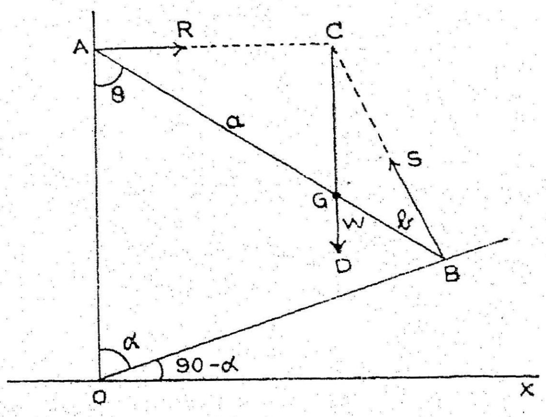
$$= W(2-\sqrt{3})$$

என்று T-ன் மதிப்பும் P-ன் மதிப்பும் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $(a+b)$ நீளமான ஒரு கனக் கம்பி (எடை W) ஒருமுனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின் மேலும், மற்றொரு முனை சுவருக்கு α அளவு சாய்ந்துள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மேலும் அசைவற்று நிற்கிறது. குத்துக் கோட்டிற்கு θ அளவு அக்கம்பி சாய்ந்திருக்குமானல் $\tan\alpha\tan\theta = \dfrac{a+b}{a}$ அல்லது $\dfrac{a+b}{b}$ என நிறுவுக. கனக் கம்பியின் புவியீர்ப்பு மையம் ஒரு முனையிலிருந்து a தூரத்திலிருக்கிறதெனக் கொள்க.

(படம் 8-7.5.)-ல் AB ஒரு கனக்கம்பி; நீளம் $(a+b)$; புவியீர்ப்பு மையம் G; $AG = a$; $GB = b$. குத்துச்சுவரில் ஒருமுனை

A; அங்கு குத்துக்கோட்டில் R என்ற எதிர்வினை (AC வழியாக) செயற்படுகிறது. மற்றொரு முனை AB சாய்தளத்தில் B-ல் இருக்கிறது. OB–க்குக் குத்துக்கோடான BC-ல் எதிர்வினை S செயற்



படம் 8-7.5.

படுகிறது. இரு எதிர்வினைகளும் C-ல் சந்திக்கட்டும். மூன்றுவது விசை கம்பியின் எடை W G-ல் கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது. அசைவற்ற நிலையாதலால் R, S, W மூன்றும் இணை கோடுகளில் செயற்படவேண்டும்; அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். R–ம் S–ம் C-ல் சந்திப்பதால், W என்ற விசை (எடை) C வழியாகச் செல்ல வேண்டும். ஆனால், G-ல் W செயற்படுகிறது. $\therefore$ CG என்பது W செயற்படும் குத்துக்கோடு. இது வரை விசைகளைப் பார்த்தோம்.

இப்போது வடிவ கணிதப் பண்புகளைப் பார்ப்போம்

$\angle AOB = \alpha$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$\therefore$ OX கிடைக்கோடானல் $\angle BOX = 90 - \alpha$

$\angle OAB = \theta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது $\angle CGB = 180 - \theta$ ($\because$ $\angle AGD = 180 - \theta$)

$\angle ACD = 90°$ $\angle BCG = 90 - \alpha$

கோண கணிதத் தேற்றப்படி,

$$(a+b) \cot (180 - \theta) = a \cot 90 - b \cot (90 - \alpha)$$

$$-(a+b) \cot \theta = -b \tan \alpha$$

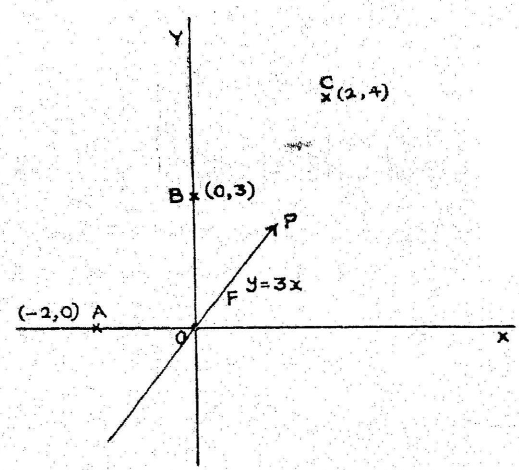
$$\tan \alpha \tan \theta = \frac{a+b}{b}$$

$AG = b$ எனவும், $BG = a$ எனவும் கொண்டால்

$$\tan \alpha \tan \theta = \frac{a+b}{a}$$ எனப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6: (−2,0) ; (0,3) ; (2,4) என்ற புள்ளிகளை யொட்டி ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் ஒரு தளத்தில் செயற்படும் விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் முறையே +6, +3, −2 ஆகும். (கூட்டு) விளைவு விசை யாதெனவும், அது செயற்படும் கோட்டின் சமன் பாட்டையும் காண்க.

(படம் 8-7.6.)-ல் A, B, C என்ற புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் 8-7.6

விசை செயற்படும் கோடு $ax + by + c = 0$ எனக் கொள்க; விசையளவு F எனக் கொள்க.

$(-2, 0)$ ஐ யொட்டித் திருப்புத்திறன் $= \dfrac{F(-2a + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 6$

$(0, 3)$ ஐ யொட்டிய திருப்புத்திறன் $= \dfrac{F(3b + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$

(2, 4) ஐ யொட்டிய திருப்புத்திறன் $\dfrac{F(2a+4b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}} = -2$

$$\therefore \quad \frac{-2a+c}{3b+c} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{3b+c}{2a+4b+c} = \frac{3}{-2}$$

$$\frac{2a+4b+c}{-2a+c} = \frac{-2}{6}$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் கோட்டில் சமன்பாடு $y = 3x$ எனக் காண்க. இது ஆய ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடாகும்.

$y = 3x$ என்ற நேர்கோட்டில் F என்ற விசை OP என்ற திசையில் செயற்படும்.

$(-2,0)$ ஐ யொட்டி, F-ன் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{F \times 6}{\sqrt{10}} = 6$$

$\therefore \quad F = \sqrt{10}$ எனப் பெறலாம்.

(கூட்டு) விளைவு விசையை ஏன் PO என்ற திசையில் எடுக்கவில்லையெனக் கண்டறிக.

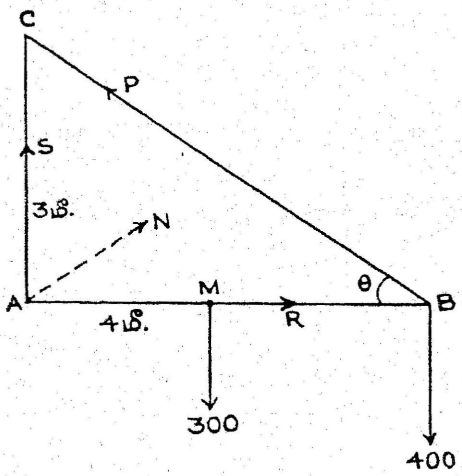
எடுத்துக்காட்டு 7: ஒரு கனமான சீரான தூலம் (எடை 300 கி. கிராம்) 4 மீட்டர் நீளம்; ஒரு முனை சுவரில் ஒரு கீலில் பதிக்கப்பட்டிருக்கிறது. மற்ற முனையில் ஓர் இலேசான கழி சேர்க்கப்பட்டு அக்கழி முனை தூலத்தின்மேல், சுவரில் 3 மீட்டர் உயரத்தில் நிலை நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. தூலம் கிடைக் கோட்டில் அசைவற்று நிற்கிறது. தூல முனையில் 400 கி. கிராம் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. இதன் அசைவற்ற நிலையில் இலேசான கழியிலுள்ள இழு விசை என்ன? தூலத்தின்மேல் செயற்படும் அழுத்த மென்ன?

(படம் 8-7·7.)-ல் குறிப்பிட்டிருக்கும் விசைகளைக் காண்க.

AB தூலம்;
A—கீல்முனை.
M—மையம்

M-ல் எடை 300 கி.கி. கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது.

B-ல் எடை 400 கி. கி. கட்டித் தொங்கவிட்டிருக்கிறது; அதுவும் கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது. மேற்கூறியவை வெளி விசைகளாகும்.



(படம் 8-7·7.)

உள் விசைகள் : BC என்ற கழியில் இழுவிசை, BC-ல் P என ஒன்று செயற்படும். இல்லாவிடில், கழி உடைந்துவிடும்.

A என்ற கீலில் ஓர் அழுத்தமிருக்கும்; எதிர்வினை அவ்வழுத்தத்தை ஈடு செய்யும். அவ் வெதிர்வினை எந்தத் திசையில் எந்த அளவில் இருக்குமென நமக்குத் தெரியாது. எனவே, அவ் விசையின் பிரித்த பகுதிகள் AB-ன் பக்கம் R எனவும், BC-ன் பக்கம் S எனவும் கொள்க. நமக்கு R, S இரண்டும் தெரியாது.

AB ஐ x அச்செனவும், AC ஐ y அச்செனவும் கொண்டு

$$X = 0$$
$$Y = 0$$
$$G = 0$$

என்ற மூன்று அசைவற்ற நிலைக்குரிய சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

வடிவ கணித, கோண கணிதப் பண்புகள்:

$AC = 3$மீ; $AB = 4$மீ; $\angle CAB = 90°$. எனவே, $BC = 5$ மீ.

$\angle ABC = \theta$ எனக் கொண்டால் $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$

$$0 = X = R - P\cos\theta \qquad \ldots (1)$$
$$0 = Y = S + P\sin\theta - 700 \qquad \ldots (2)$$

A ஐ ஒட்டி திருப்புத்திறன் கண்டால், S, R என நமக்குத் தெரியாத விசைகள் $G = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் வாரா.

$\therefore$ A ஐ யொட்டிய திருப்புத்திறன்

$$0 = G = -300\times2 - 400\times4 + P.4\sin\theta \ldots(3)$$
$$\therefore\quad P.4.\frac{3}{5} = 2200$$
$$\therefore\quad P = \frac{2200\times5}{12}$$
$$= \frac{2750}{3}$$ கி. கி. (கழியின் இழுவிசை)

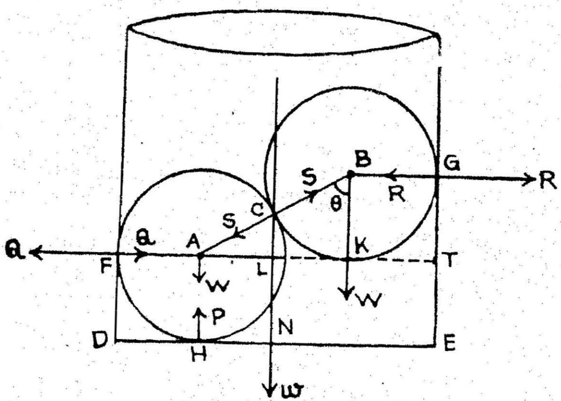
(1)-லிருந்து $R = P\cos\theta = \frac{2750}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{2200}{3}$ கி. கிராம்.

(2)-லிருந்து $S = 700 - P\sin\theta = 700 - \frac{2750}{3}\times\frac{3}{5} = 150$ கி. கிராம்.

$\therefore$ A–லுள்ள அழுத்தமானது, R, S என்று இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு, அதாவது $\sqrt{\left(\frac{2200}{3}\right)^2 + (150)^2} = \frac{50\sqrt{2017}}{3}$ கி. கி. திசை, கிடைக்கோடு AB-க்கு α அளவு சாய்ந்திருக்கும். அப்போது $\tan\alpha = \frac{S}{R} = \frac{9}{44}$. (படம் 8-7.7-ல் AN என்ற இடையிடை விட்ட கோடுகளால் காட்டப்பட்டிருக்கிறது).

எடுத்துக் காட்டு 8: இரண்டு வழவழப்பான சமகோளங்களின் ஆரம் r; சம எடை பெற்றவை W, W: இரு பக்கங்களும் திறந்த ஒரு உருளை செங்குத்தாக நிற்கிறது. அதன் ஆரம் a. அதனுள் இவ்விரு கோளங்களும் வைக்கப்படுகின்றன. $a < 2r$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. உருளையின் எடை $2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$-க்குக் குறைவாயிருப்பின் அவ்வுருளை கவிழுமென நிறுவுக.

(படம் 8-7.8.)-ல் உள்ளபடி உருளையினுள் இரு கோளங்கள் வைக்கப்பட்டிருப்பது காண்க. A மையங்கொண்ட, கீழ்க்



படம் 8-7.8.

கோளத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இக் கோளத்தின் மேல் செயற்படும் விசைகளாவன:

(1) மையம் A-ல் எடை W கீழே;

(2) தரையைத் தொடுமிடம் H-ல் எதிர்விசை P மேலே ↑;

(3) கோளம், உருளையை அழுத்துமிடம் F—அங்கு எதிர் விளை Q →;

(4) இக்கோளம், மற்ற கோளம் தொடுமிடம் C; அங்கு இரண்டாம் கோளத்தின் எதிர்விசை, CA வழியாக. ACB என்பது இரு மையங்களையும் சேர்க்கும் நேர்கோடு C என்ற தொடுமிடம் வழியாகச் செல்கிறது. $AC = CB = r$.

B மையங்கொண்ட கோளத்தின் மேல் செயற்படும் விசைகளாவன :

(1) மையம் B–ல் எடை W கீழே;

(2) தொடுமிடம் G–ல் எதிர்விளை R ←;

(3) தொடுமிடம் C-ல் எதிர்விளை, CB-ன் மேல் S.

மையங்களை இணைக்கும் கோடு AB, செங்குத்துக் கோட்டுக்குச்

சாய்ந்திருக்கும் கோணம் θ; கிடைக்கோட்டுக்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $90-\theta$. கிடைக்கோடு $FALT$ எனக் கொண்டால், $\angle CAL = 90-\theta$ ஆகும். B மையங்கொண்ட கோளத்தின் மேல் செயற்படும் விசைகளுக்கு இலாமியின் தேற்றம் பயன் படுத்தினுல்,

$$\frac{W}{\sin(90+\theta)} = \frac{R}{\sin\theta} = \frac{S}{\sin 90}$$

$$R = W \tan\theta$$

$$S = W \sec\theta$$

A–ல் செயற்படும் கிடைக் கோட்டு விசைகளை ஒன்றுக் கொன்று சமமாக்கினுல் (அசைவற்ற நிலைக் கட்டுப்பாடு)

$$S\sin\theta = Q$$

$$\therefore Q = W\sec\theta\sin\theta$$

$$= W\tan\theta$$

உருளையின் எடை ω எனக் கொள்வோம். அது உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செங்குத்தாகச் செயற்படும். ω செயற்படும் செங்குத்துக் கோடு DE-ன் மையம் N வழியாகச் செல்லும். மேலும், $FA=KT=r$; $AC=CB=a$. எனவே, $AL=LK$; $FL = LT$; எனவே, C, L, N ஒரு நேர்கோட்டிலிருக்கும்.

உருளையின் மேல் செயற்படும் விசைகள்:

(i) N வழியாக, செங்குத்துக் கோடு — அளவு ω ↓

(ii) முதற் கோளம் A-ன் அழுத்தம் F–ல் Q ←

(iii) இரண்டாம் கோளம் B–ன் அழுத்தம் G-ல், R →.

(iv) பொது வாகத் தரையின் எதிர்விசை ↑.

உருளை கவிழும் தரையின் எதிர்விசை E-ல் செயற்படும்; மற்ற இடங்களில் உருளை வரம்பு தரையைத் தொட்டும் தொடாமலும் நிற்கும். Eஐ ஒட்டி, உருளை கவிழப் போகும் சமயம், வலஞ்சுழித் திருப்புத்திறன், இடஞ்சுழித் திறப்புத்திறனுக்குச் சற்று அதிகமாக அல்லது சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

Eஐ யொட்டி உருளையை வலஞ்சுழியாகத் திருப்பக்கூடிய திருப்புத்திறன் $= R.\ EG. = W.\tan\theta.\ EG.$

இடஞ்சுழியாகத் திருப்பக்கூடிய திருப்புத்திறன்

$$= \omega \times a + Q.r$$

$$\omega a + W \tan \theta . r.$$

கவிழும் சமயம் $R.\ EG \geq \omega a + Qr$

மேலும் $EG = ET + TG = DF + KB$

$$= r + AB \cos \theta$$

$$= r + 2r \cos \theta$$

$\therefore \quad W \tan \theta\ (r + 2r \cos \theta) \geq \omega a + W \tan \theta \cdot r$

அதாவது, $\omega a \leq W.\ 2r \sin \theta$

இப்போது $\sin \theta = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{FL-FA}{r}$

$$= \frac{DN-r}{r}$$

$$= \frac{a-r}{r}$$

கவிழும் சமயத்தில்

$\omega a \leq W.2r \left(\dfrac{a-r}{r}\right)$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\omega \leq 2W \left(\dfrac{a-r}{a}\right)$

அதாவது $\omega \leq 2W \left(1-\dfrac{r}{a}\right)$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை.

எனவே கவிழாதிருக்க வேண்டுமாயின்,

$$\omega > 2W \left(1-\frac{r}{a}\right)$$

$r = a$ ஆனால் $\omega > 0$ என்ற முடிவை எவ்வாறு பொருள் செய்யக்கூடும்?

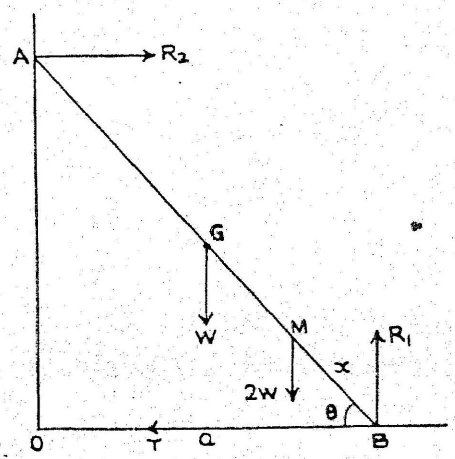
$r = \frac{1}{2} a$ ஆனால், என்ன வாகும்?

$r > a$ ஆனால் கோளம், உருளையின் உள்ளே முழுதும் நுழையாது என்பதைக் காண்க.

$r < \frac{1}{2} a$ ஆனால் என்ன வாகும்?

இவற்றினைப் பற்றி ஆராய்க.

எடுத்துக்காட்டு 9 : ஓர் ஏணி; நீளம் $2l$, எடை W, ஒரு வழவழப்பான செங்குத்துச் சுவரின்மேல் சாய்ந்து நிற்கிறது. ஏணியின் கீழ்முனை வழவழப்பான கிடைத்தரையில் நகர்ந்து விடாவண்ணம், சுவரும் தரையும் சந்திக்கும் இடத்தையும் ஏணியின் கீழ் முனையையும் a நீளமுள்ள கயிறு இழுத்துப் பிடித்திருக்கிறது. $2W$ எடையுள்ள மனிதன் ஏணியின் மேல் தரையிலிருந்து $\frac{l}{2}$ தூரத்தில் உள்ள ஒரு படியில் நிற்கிறான். ஏணி தாங்கப்படும் இடங்களிலுள்ள எதிர்விசைகளையும் கயிற்றின் இழு விசையையும் காண்க. கயிற்றின் மீப்பெரு இழு விசைப் பலம் W ஆனால் அம் மனிதன் ஏணியில் எவ்வளவு தூரம் அச்சமின்றி ஏற முடியும்?



படம் 8-7.9.

(படம் 8-7.9.)-ல் தரை OB; குத்துச் சுவர் OA; இரண்டும் சந்திக்குமிடம் O.

AB ஏணியின் நீளம் $2l$; $AG = GB = l$; எனவே, G என்பது ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம்; அங்கு W செயற்படுகிறது. $OB = a$ என்ற நீளமுள்ள கயிறு Bஐயும் Oஐயும் இணைத்து, ஏணி நகராவண்ணம் நிறுத்துகிறது. அக் கயிற்றில் T என்ற இழு விசை செயற்படுகிறது. $2W$ எடையுள்ள மனிதன், ஏணியில் அடி முனையிலிருந்து x தூரமுள்ள இடத்தில், அதாவது M-ல் நிற்கிறான் என வைத்துக் கொள்வோம். இங்கு $2W$ செயற்படுகிறது.

A என்ற முனை சுவரை அழுத்துமிடத்தில் R_2 என்ற எதிர் வினையும், B என்ற முனை தரையை அழுத்துமிடத்தில் R_1 என்ற எதிர்வினையும் செயற்படுகின்றன.

செயற்படும் விசைகள் யாவும் படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

OBஐ xஅச்சு எனவும்,

OAஐ y அக்சு எனவும்

கொண்டு அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகளான

$X = 0,\ Y = 0,\ G = 0$ என்பவற்றை எழுதுவோம்.

$$O = X = R_2 - T \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$O = Y = R_1 - 2W - W \quad \ldots \quad (2)$$

B என்ற புள்ளியை யொட்டி, விசைகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் கண்டு பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்வோம். இதற்காக $\angle ABO = \theta$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$0 = G = 2Wx\cos\theta + W.l\cos\theta - R_2\, 2l\sin\theta \quad \ldots (3)$$

வடிவ கணித, கோண கணித உண்மைகள்.

$$\cos\theta = \frac{a}{2l};\ \sin\theta = \frac{\sqrt{4l^2 - a^2}}{2l}$$

$\therefore$ (3) என்ற சமன்பாடு,

$$\frac{2Wxa}{2l} + Wl\frac{a}{2l} - \frac{R_2 .\ 2l\sqrt{4l^2 - a^2}}{2l} = 0 \text{ என வரும் } (4)$$

(1), (2), (4) சமன்பாடுகள் கொண்டு

$T = R_2$ எனவும்

$R_1 = 3W$ எனவும்

$$R_2 = \frac{Wa\,(2x + l)}{l.2\sqrt{4l^2 - a^2}} \text{ எனவும் கிடைக்கும்.}$$

$$\therefore\ T = \frac{Wa\,(2x+l)}{l.2\sqrt{4l^4 - a^2}} \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

அம் மனிதன் ஏணியின் மேல் தரையிலிருந்து $\frac{l}{2}$ தூரத்தில் இருந்தால், Tஐக் கொடுக்கும் சமன்பாட்டில், $x = \frac{l}{2}$ என ஈடு செய்தால்,

அப்போது இழு விசை $= \dfrac{Wa}{l} \dfrac{(l+l)}{2\sqrt{4l^2-a^2}} = \dfrac{Wa}{\sqrt{4l^2-a^2}}$

எனப் பெறலாம்.

கயிறு தாங்கக் கூடிய மீப்பெரு இழுவிசை W எனில், இழு விசை Wஐ மிஞ்சும் போது கயிறு அறுந்து ஏணி நகர்ந்து மனிதன் விழ ஏதுவாயிருக்கும். எனவே,

$$\frac{Wa}{l} \cdot \frac{(2x+l)}{2\sqrt{4l^2-a^2}} \ngtr W$$

அதாவது $a(2x+l) \ngtr 2l\sqrt{4l^2-a^2}$

அதாவது $2x \ngtr \dfrac{2l\sqrt{4l^2-a^2}}{a} - l$

அதாவது $x \ngtr \dfrac{l\sqrt{4l^2-a^2}}{a} - \dfrac{l}{2}$

$$x \ngtr \frac{l\,[2\sqrt{4l^2-a^2}-a]}{2a}$$

எனவே, அம்மனிதன் அச்சமின்றி, ஏணியின் மேல் கீழ் முனையிலிருந்து $l\,\dfrac{[2\sqrt{4l^2-a^2}-a]}{2a}$ என்ற தூரம் ஏறலாம். அதற்கு மேல் ஏறினுல், கயிறு அறுந்து விடும்; ஏனெனில், x அதிகமாக ஆக, T அதிகமாவதைக் காண்க.

மேலும், இந்தக் கணக்கில், அவன் ஏணி உச்சிக்கு அச்சமின்றிப் போகவேண்டுமானுல், கயிற்றின் இழுவிசை குறைந்த பட்சம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டுமெனவும் கணக்கிடலாம்.

ஏணி உச்சிக்குப் போகும் போது, $x = 2l$ ஆகிறது. அப்போது கயிற்றில் செயற்படும் இழுவிசை,

$$\frac{Wa}{l} \cdot \frac{(4l+l)}{2\sqrt{4l^2-a^2}} = \frac{5\,Wa}{2\sqrt{4l^2-a^2}}$$

குறைந்தபட்சம் அக் கயிறு $\dfrac{5\,Wa}{2\sqrt{4l^2-a^2}}$ அளவு தாங்கக் கூடிய பலம் பெற்றிருந்தால்; அவன் ஏணி உச்சிக்குப் போகலாம்; ஒரு விபத்தும் நேராது. மற்றும் சிறப்பாக, $a = l$ எனக் கொண்டால், அதாவது ஏணி கிடைக் கோட்டிற்கு $60°$

சாய்வில் இழுத்துக் கட்டப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொண்டால், அவன் ஏணி உச்சிக்குப் போகும்வரை கயிறு அறுபடாதிருக்க வேண்டுமெனில் குறைந்தபட்சம் அக்கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{5\,Wl}{2\sqrt{4l^2 - l^2}} = \frac{5\;W}{2\sqrt{3}}$ இருக்க வேண்டும்.

இதற்குக் குறைவாயின் அவன் உச்சிக்குப் போவதற்கு முன் கயிறு அறுபடும்.

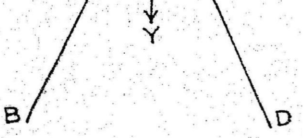
8-8. மூட்டுகளில் (இணைப்புகளில்) எதிர்விணைகள் (Reactions at joints) :

ஒரு கனமான மொத்தமான கம்பி A என்ற ஒரு கீலில் வழவழப்பாக நகரும் வகையில் அல்லது சுழலும் வகையில் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், A-ல் ஓர் அழுத்து விசை செயற்படுகிறது. அவ்வாறே இரு கம்பிகள் ஒரு கீலில் இணைக்கப்பட்டு (ஓர் அச்சினுலோ, ஓர் ஆணியினுலோ) உராய்வு இல்லாமல் நகர அல்லது சுழல முடியுமாயினும், அக்கீலில் ஓர் அழுத்து விசை செயற்படுகிறது. அக்கீலில் ஓர் எதிர்விணை செயற்படுகிறது. அவ் வெதிர்விணை கீலின் மையப்புள்ளி வழியாக இயங்குகிறது.

(படம் 8-8.1.)-ல் AB என்ற ஒரு கனக்கம்பி A-ல் ஒரு கீலால் இணைக்கப்பட்டு, அம்பு காட்டிய வழியாக ↻ உராய்வின்றி



படம் 8-8.1.



படம் 8-8.1.1.

சுழலக் கூடியதாயுள்ள தெனக் கொள்க. A-ல் செயற்படும் எதிர்விணையின் அளவு, திசை நமக்குத் தெரியாத நிலையில், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் (இங்கு AX, AY என்ற x, y அச்சுத் திசைகளில்) அவ்வெதிர் விணையின் பிரித்த

பகுதிகளை X, Y என ஏற்றுக்கொள்கிறோம். X, Y இரண்டினையும் கணக்கிட முடியுமாயின், A-ல் செயற்படும் எதிர்வினை R-ன் எல்லா விவரங்களும் கிடைக்கும்.

(படம் 8-8.1.1)-ல் காட்டியபடி AB, AD என்ற இரு கம்பிகள் A என்ற இடத்தில் ஒரு மூட்டு அல்லது இணைப்பு பெற்றிருக்கின்றனவெனக் கொள்வோம்; மூட்டு ஓர் ஆணியாகவோ, கம்பியாகவோ அல்லது சிறிய பந்துக்கிண்ண மூட்டு (ball and socket) என்ற எந்த வகையிலும் இருக்கலாம். அங்கு ஒரு கம்பி மற்றொரு கம்பியை அழுத்தும் வினையும் (R), எதிர் அழுத்துவினையும் (R) செயற்படும். அவற்றின் திசை, அளவு நமக்குத் தெரியாது. எனவே, A என்ற மூட்டில் x அச்சு, y அச்சு என இரு வசதியான செங்குத்தச்சு கொண்டு, அவ்வச்சுத் திட்டத்தின் அடிப்படையில் X, Y என அவ்வினை, எதிர்வினைகளைப் பகுத்துக்கூறலாம். (xஅச்சு கிடைக்கோடாகவும், y அச்சு செங்குத்தச்சாகவும் கொள்வது மரபு; இம்மரபு மாறினாலும் தவறு ஏற்படாது.) (படம் 8–8.1.1)-ல் காட்டியபடி, A-ல் ஒரு சிறு இடைவெளி விட்டு $X, X; Y, Y$ என எதிரெதிர்த்திசைகளில் அப்பிரித்த பகுதி விசைகளைக் காட்டலாம். அம்மூட்டினை, ஒரு புள்ளியாகக் கொண்டு திருப்புத்திறன்கள் கண்டால், மூட்டினில் செயற்படும் எதிர்வினையானது திருப்புத்திறன் சமன்பாட்டில் (Moment Equation) தோன்றாது. ஒரே ஒரு கம்பியின் மேல் செயற்படும் விசைகளை மாத்திரம் கணக்கிலெடுக்கும் போது, மற்ற கம்பியின் எதிர்வினை கணக்கில் தோன்றும். இரண்டு கம்பிகளையும் ஒரே பொருளாக எடுக்கும் போது, வினை எதிர்வினைகள் ஒன்றுக் கொன்று ஈடு செய்து கொண்டு, X, Y என்பவை சமன்பாடுகளில் தோன்றா. (தோன்றி பூச்சியமாகும்).

பின்வரும் கணக்குகள் மேற்கூறிய மூட்டுகள் பற்றிய கொள்கைகளை ஒருவாறு விளக்கும் :

8-9. **எடுத்துக்காட்டு 1:** A என்ற இடத்தில் உராய்வற்ற மூட்டினையுடைய இரு கம்பிகள், சம எடை W, சம நீளம் $2a$, நிலைநிறுத்தப்பட்ட ஒரு வழவழப்பான கோளத்தின் (ஆரம் r) மேல் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அக் கம்பிகள் குத்துக்கோட்டுக்கு θ என்ற சாய்வு பெற்று அசைவற்றிருப்பின் $r \sec^2 \theta = a \tan^3 \theta$ என்ற தொடர்பினை நிறுவுக.

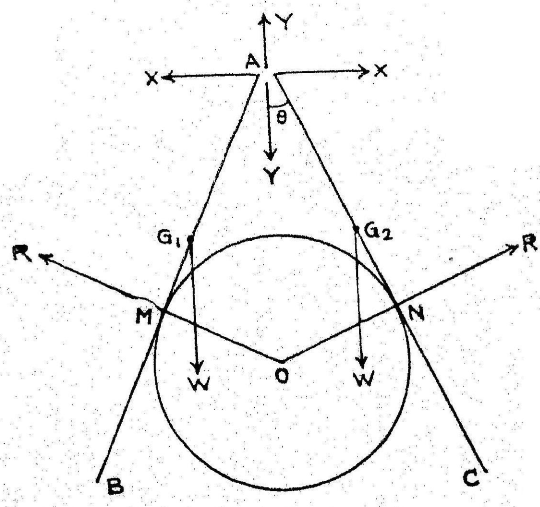
O மையங் கொண்ட ஒரு கோளம் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. இரு கம்பிகள் AB, AC, மூட்டு A-ல் இணைக்கப்பட்டு

அக்கோளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. (படம் 8–9.1. காண்க.)

செயற்படும் விசைகள்

AB-ன் மையம் G_1-ல் *W* என்ற எடை, *AC*-ன் மையம் G_2-ல் *W* என்ற எடை, *AB*, கோளத்தைத் தொடுமிடம் *M*-ல் கோளத்தின் எதிர்வினை *R*, *OM* வழியாகச் செயற்படும். ($\because OM \perp AB$). *AC*, கோளத்தைத் தொடுமிடம் *N*-ல் கோளத்தின் எதிர்வினை *R* (சமச்சீராக இருப்பதால்) *ON* வழியாகச் செயற்படும். ($\because ON \perp AC$). சென்ற பத்தியில் கூறியபடி,

AC ஐ *AB* அழுத்துவதால் $\rightarrow X$, $\downarrow Y$ என்ற விசைகளும், *AB*ஐ *AC* அழுத்துவதால் $X \leftarrow$, $\uparrow Y$ என்ற விசைகளும் வினைகள், எதிர் வினைகளாக எதிரெதிர்த்திசைகளில் செயற்படும்.



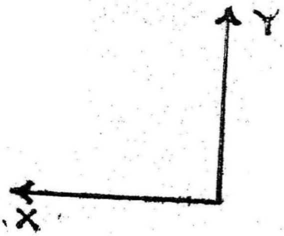
படம் 8–9.1.

(i) ***AB* என்ற கம்பியை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால், அதன் மேல் செயற்படும் விசைகள் :**

G_1-ல் *W*;

M-ல் *R*;

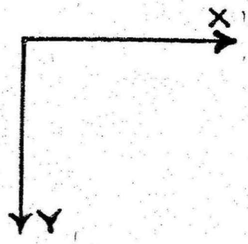
A-ல் எதிர்வினைப் பிரித்த பகுதிகள்



(ii) AC என்ற கம்பியை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால், அதன் மேல் செயற்படும் விசைகள் :

G_2-ல் W;
N-ல் R;

A-ல் எதிர்வினை பிரித்த பகுதிகள்



(iii) ஒரே பொருளாக எடுத்துக்கொண்டால், அப் பொருளின் மேல் செயற்படும் வினைகள் :

G_1-ல் W;
G_2-ல் W;
M-ல் R;
N-ல் R;

A அசைவற்ற நிலையில் எதிரெதிர் வினைகளால் செயலற்றுள்ளது.

படத்தில் காட்டியபடி, AC என்ற கம்பி குத்துக்கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்கிறது. முதலில் AB-ன் அசைவற்ற நிலைக்குரிய சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

x—அச்சு கிடைக்கோடு (→ கூட்டுக்குறி)

y—அச்சு கீழே செல்லும் குத்துக்கோடு (↓ கூட்டுக்குறி)

$$-R\cos\theta - X = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$W - R\sin\theta - Y = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

A என்ற புள்ளியை யொட்டி, திருப்புத்திறன் சமன்பாடு எழுதினால் $W\,a \sin\theta\; R - r \cot\theta = 0$ ... (3)
AC-ன் அசைவற்ற நிலைக்குரிய சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

$R \cos\theta + X = 0$ ... ... (4)

$-R \sin\theta + Y + W = 0$ ... ... (5)

A ஐ யொட்டிய திருப்புத்திறன் கண்டால்,

$-W\,a \sin\theta + R\,r \cot\theta = 0$ ... ... (6)

(2)-ம் (5)-ம் ஒப்பிட்டால்

$W = R \sin\theta$ எனவும் ... ... (7)

$Y = 0$ எனவும் பெறப்படும். ... ... (8)

(7-ல் கண்ட தொடர்பை (3)-ல் பயன்படுத்தினால்

$$R\,a \sin^2\theta - R\,r \cot\theta = 0$$

அதாவது $a \sin^2\theta = r \cot\theta$

அதாவது $\dfrac{a}{1 + \cot^2\theta} = \dfrac{r}{\tan\theta}$

அதாவது $\dfrac{a \tan^2\theta}{\sec^2\theta} = \dfrac{r}{\tan\theta}$

அதாவது, $r \sec^2\theta = a \tan^3\theta$ என்ற தொடர்பு பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: AB, AC என்ற இரு சமநீள, சம எடையுள்ள சீரான கம்பிகள் A என்ற இடத்தில் ஒரு மூட்டினால் பிணைக்கப்பட்டு B, C இரண்டு முனைகளும் ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேலும், ABC குத்துத்தளத்திலும் நிற்கின்றன. B, C என்ற முனைகள் நகர்ந்து விடாதபடி B, C என்பவை முறையே AC, AB-ன் மையத்தோடு இரு கயிறுகளால் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. AB, AC இரண்டும் BC என்ற கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்கிறது கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{1}{8} W (\operatorname{cosec}^2\theta + 8\cot^2\theta)^{\frac{1}{2}}$ எனவும், மூட்டில் எதிர்வினை $\frac{3}{4} W \cot\theta$ எனவும் நிறுவுக. (கம்பி நீளம் $2a$)

(படம் 8-9.2.)-ல் விசைகள் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கின்றன.

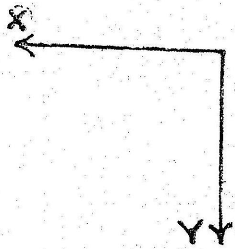
AB-ன் மேல் செயற்படும் விசைகள்

(1) E-ல் W எடை;

(2) B-ல் அழுத்துவதால் எதிர்வினை R;

(3) E-ல் கயிற்றின் இழுவிசை

(4) B-ல் கயிற்றின் இழுவிசை



(5) A-ல் AC-ன் எதிர்வினைகள்

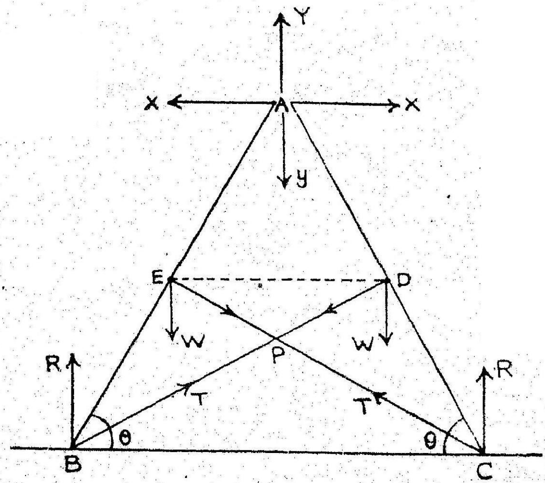
அவ்வாறே AC-ல் செயற்படும் விசைகள் கண்டு கொள்க.

$\angle ACB = \angle ABC = \theta$; $\angle DBC = \angle ECB = \alpha$ எனக் கொள்க.

AB **அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்**

x—அச்சு கிடைக்கோடு

y—அச்சு குத்துக்கோடு



படம் 8-9.2.

$$2T \cos \alpha - X = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$R + T \sin \alpha - T \sin \alpha - Y - W = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Aஐ ஒட்டி, திருப்புத்திறன் சமன்பாடு எழுதினால்,

$$-R\,2a\cos\theta + Wa\cos\theta + 2Ta\sin(\theta+\alpha) = 0 \quad (3)$$

AC அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$2T\cos\alpha - X = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$R + T\sin\alpha - T\sin\alpha - Y - W = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

$$R.\,2a\cos\theta - Wa\cos\theta - 2Ta\sin(\theta+\alpha) = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

$$\therefore \quad X = 2T\cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

$$Y = R - W \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$R = \left[W + \frac{2T\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}\right]\frac{1}{2} \quad \ldots \quad (9)$$

AB, AC என்ற இரண்டையும் ஒரு பொருளெனக் கொண்டு—அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$2R = 2W$$

(7), (8) எடுத்துக் கொண்டால் $Y = 0$

(9) ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$2W = W + \frac{2T\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}$$

$$W = 2T\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}$$

$$\therefore \quad T = \frac{W\cos\theta}{2\sin(\theta+\alpha)} \quad \ldots \quad (10)$$

$$X = 2T\cos\alpha = \frac{2W\cos\theta\cos\alpha}{2\sin(\theta+\alpha)}$$

$$= \frac{W}{\tan\theta + \tan\alpha} \quad \ldots \quad (11)$$

வடிவ கணித உண்மைகள்

$$\triangle\ ABD\text{-ல்}\ \frac{2a}{\sin(\theta+\alpha)} = \frac{a}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$\therefore \quad 2\sin\theta\cos\alpha - 2\cos\theta\sin\alpha = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \sin\theta\cos\alpha = 3\cos\theta\sin\alpha$$

$$\tan\theta = 3\tan\alpha \quad \ldots \quad (12)$$

(12) ஐ (11)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$X = \frac{W}{\tan\theta + \frac{1}{3}\tan\theta} = \frac{3W}{4}\cot\theta \quad \dots \quad (13)$$

(10) ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$T = \frac{W\cos\theta}{2\sin(\theta + \alpha)}$$

$$= \frac{W}{2\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\alpha + \sin\alpha\right)}$$

$$= \frac{W}{(2\tan\theta\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$= \frac{W}{2\left\{\tan\theta\,\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\tan^2\theta}{9}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{\tan^2\theta}}}\right\}}$$

$$= \frac{W}{2\left[\frac{3\tan\theta}{\sqrt{9+\tan^2\theta}} + \frac{\tan\theta}{\sqrt{9+\tan^2\theta}}\right]}$$

$$= \frac{W\sqrt{9+\tan^2\theta}}{8\tan\theta}$$

$$= \frac{W}{8}\sqrt{9+\cot^2\theta+1}$$

$$= \frac{W}{8}\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta + 8\cot^2\theta} \quad \dots \quad (14)$$

(13), (14) இரண்டும் நாம் நிறுவ வேண்டியவை நிறுவப்பட்டன.

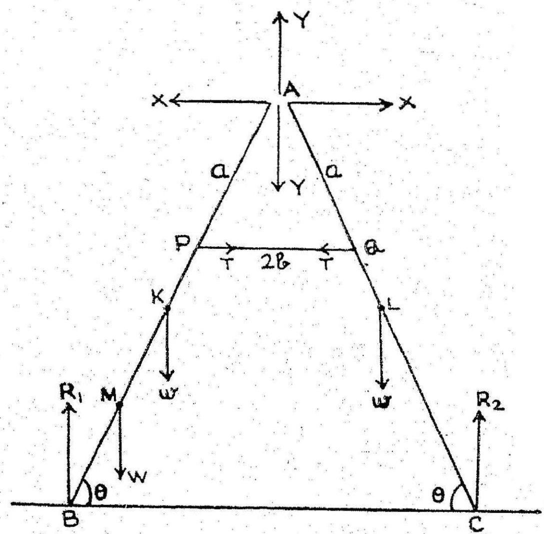
எடுத்துக்காட்டு 3 : இரு சீரான ஏணிகள் l, A என்ற இடத்தில் வழவழப்பான கீலில் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன; ஏணியின் எடை ஒவ்வொன்றும் ω, ω. $AP = AQ = a$ என, ஏணியில் P, Q என்ற இடங்களை $2b$ அளவுள்ள ஒரு கயிறு இழுத்துப் பிடித்திருக்கிறது. ஓர் ஏணியின் அடிப் பக்கத்திலிருந்து அப்பக்கம் x தூரத்தில் W எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏறி நிற்கிறான். முழுவதும் குத்துத் தளத்தில் கிடைத்தரை மேல் அசைவற்று நிற்கிறது. கயிற்றின் இழுவிசை

$$\frac{Wx + \omega l}{2a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a - b^2}}$$ என நிறுவுக.

(படம் 8-9.3)-ல் விசைகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. $BM = x$, M-ல் W எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏறி நிற்கிருன்.

$AB = AC = l$; $AP = AQ = a$; $PQ = 2b$

$\angle ABC = \theta$ எனக் கொள்க.



படம் 8-9.3

AB-ல் செயற்படும் விசைகள் :

(1) B-ல் தரையின் எதிர்விளை — R_1

(2) M-ல் மனிதன் எடை — W

(3) K-ல் ஏணியின் எடை — ω

(4) P-ல் கயிற்றின் இழுவிசை — T

(5) A-ல் மூட்டு எதிர்விளை — $X \leftarrow$, $Y \downarrow$

AB-ன் அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள் :

x-அச்சு — கிடைக்கோடு

y-அச்சு — குத்துக்கோடு

ஆய ஆதி B.

$$T - X = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$R_1 - W - \omega - Y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Aஐ ஒட்டித் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு:

$$-R_1 l \cos\theta + W(l-x)\cos\theta + W\frac{l}{2}\cos\theta + Ta\sin\theta = 0 \quad (3)$$

$$\therefore \quad X = T \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$R_1 = W + \omega + Y \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(3)-லிருந்து $W(l-x)\cos\theta + \frac{Wl}{2}\cos\theta + Ta\sin\theta$

$$= R_1 l\cos\theta \quad \ldots \quad (6)$$

அவ்வாறே AC-ன் அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$X - T = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

$$R_2 + Y - \omega = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

Aஐ யொட்டித் திருப்புத்திறன் சமன்பாடு

$$R_2 l \cos\theta - \omega\frac{l}{2}\cos\theta - Ta\sin\theta = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

$$X = T \quad \ldots \quad (10)$$

$$R_2 = \omega - y \quad \ldots \quad (11)$$

(9)-லிருந்து $R_2 l\cos\theta = \frac{\omega l}{2}\cos\theta + Ta\sin\theta \quad \ldots \quad (12)$

இரு ஏணிகளையும் ஒரு பொருளாகக் கொண்டால் அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள்

$$T - T + X - X = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

$$R_1 + R_2 - 2\omega - W = 0 \quad \ldots \quad (14)$$

Aஐ யொட்டி திருப்புத்திறன் சமன்பாடு

$$-R_1 l\cos\theta + W(l-x)\cos\theta + \frac{\omega l}{2}\cos\theta$$

$$-\frac{\omega l}{2}\cos\theta + R_2 l\cos\theta = 0 \quad \ldots \quad (15)$$

$\therefore$ (14)-லிருந்து, $R_1 + R_2 = 2\omega + W \quad \ldots \quad (16)$

(15)-லிருந்து $W(l-x) + R_2 l = R_1 l \quad \ldots \quad (17)$

வடிவ கணித உண்மைகள்

$$\cos\theta = \frac{b}{a};\ \sin\theta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad \dots \quad (18)$$

(17)-லிருந்து $R_1 - R_2 = \dfrac{W(l-x)}{l}$

(16)-லிருந்து $R_1 + R_2 = 2\omega + W$

$$\therefore R_2 = \tfrac{1}{2}\left\{2\omega + W - W\frac{(l-x)}{l}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{2\omega l + Wl - Wl + Wx}{l}\right)$$

$$= \omega + \frac{Wx}{2l}$$

$\therefore$ (12)-லிருந்து

$$T = \frac{l\cos\theta}{a\sin\theta}\left(R_2 - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{l\cot\theta}{a}\left(\omega + \frac{Wx}{2l} - \frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{l\cot\theta}{a}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{Wx}{2l}\right)$$

$$= \frac{l\cot\theta}{2a}\,\frac{(l\omega + Wx)}{l}$$

$$= \frac{Wx + \omega l}{2a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

(18)-லிருந்து $\cot\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

எனவே, கயிற்றின் இழுவிசை

$\dfrac{Wx + \omega l}{2a}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ என நிறுவப்பட்டது.

பயிற்சி 8 (a)

1. 6 செ. மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் $ABCD$-ல் முறையே 4, 2, 2, 6, 3 கி. கிராம் எடைகள் (விசைகள்) AB, BC, AC, AD, BD,-ன்மேல் செயற்படுகின்றன. (கூட்டு) விளைவு விசையின் திசையின் அளவும், திசையும் காண்க.

2. $ABCDEF$ என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். O அதன் மையம். AB, BC, CD, DE, EF, AF என்ற திசைகளில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 அளவுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவை O வழியாகச் செல்லும் ஒரு (கூட்டு) விளைவு விசையாகவும், O-ல் செங்குத்துக் கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு திருப்புத்திறனுகவும் காண்க.

3. ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் O. BC, CA, AB வழியாக முறையே செயற்படும் P, Q, R என்ற விசைகளும் OA, OB, OC வழியாக செயற்படும் P', Q', R' என்ற விசைகளும் ஒரு பொருளை அசைவற்ற நிலையில் வைக்குமாயின்

$$P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0 \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{P.\,P'}{BC}+\frac{Q.\,Q'}{CA}+\frac{R.\,R'}{AB}=0 \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

(குறிப்பு : தொடர்ந்து O, A, B, C என்ற புள்ளிகளையொட்டி திருப்புத்திறன்களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்குக.)

4. கேள்வி (3)-ல் O என்பது குத்துக் கோடுகளின் சந்தியாயிருப்பின், $\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0$ என நிறுவுக.

5. $2a$ அளவு பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB-ன்மேல் P, $2P$, $3P$ என்ற விசைகள் முறையாகச் செயற்படின், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை காண்க.

6. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 என்ற விசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் பக்கங்களின்மேல் வரிசையாகச் செயற்படுகின்றன. அவ்வை அசைவற்ற நிலையை ஏற்படுத்துமாயின், $\sum P_1=0$ எனவும், $P_1-P_4=P_3-P_6=P_5-P_2$ எனவும் நிறுவுக

7. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்; D, E, F, முறையே BC, CA, AB-ன் மையப்புள்ளிகள். P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, $6P$ என்ற அளவுள்ள விசைகள் முறையே, BC, CA, AB, FE, ED, DF வழியாகச் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையினைக் காண்க.

8. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படும் விசைகள் $X = 40$ கி. கி. $Y = 64$ கி. கி; திருப்புத்திறன் இடஞ்சுழி 108மீ.— கி. கி. இவற்றினை ஒரு விசைக்கு மட்டுமே சமப்படுத்தினால், அவ்விசை x அச்சினை எங்குச் சந்திக்கும்?

9. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மேல் செயற்படும் விசைகள், G அளவு திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணை (couple)க்குச் சமமாகிறது. விசைகள் ஒவ்வொன்றும் செயற்படும் புள்ளி மாருது, 90° இடஞ்சுழியாகத் திருப்பப் பட்டாலும், ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகிறது என நிறுவுக. புது சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் H எனக் கொண்டால், முதலில் கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் செயற்படும் புள்ளி மாருது, $2\tan^{-1}\left(\frac{H}{G}\right)$ கோணத்தில் இடஞ்சுழியாகத் திருப்பப்பட்டாலும் அவ்விசைகள் திருப்புத்திறன் G-உடைய ஒரு சுழலிணைக்கே சமமென நிறுவுக.

10. கேள்வி 9-ல் முதல் கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் α என்ற கோண அளவு இடஞ்சுழியாகத் திருப்பப்பட்டால், அவ்விசைகள் $G\cos\alpha + H\sin\alpha$ என்ற திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமென நிறுவுக.

11. ஒரு தளத்தில் A, B, C மூன்று குறிப்பிட்ட புள்ளிகள்; அத் தளத்திலுள்ள ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன், அப் புள்ளிகளை யொட்டி முறையே G_1, G_2, G_3. அந்த விசையானது முக்கோணம் ABC-ல் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின்மேல் செயற்படும் மூன்று விசைகளின் (கூட்டு)விளைவு விசையானுல், அவ் விசைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

12. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்களின்மேல் செயற்படும் விசைகள், அசைவற்ற நிலையை உண்டு பண்ணுகின்றன. அப்படியானுல் ஒவ்வொரு விசையும், தாம் செயற்படும் பக்கங்களுக்கு எதிர்ப்பக்க நீளங்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளன வென நிறுவுக.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணச் சம வெட்டிகளின் மேல் அந்தந்த முனைகளிலிருந்து, சமவெட்டி நீளங்களுக்கு

நேர் விகிதத்திலுள்ள விசைகள் செயற்பட்டு, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளை அசைவற்ற நிலையில் இருத்துமானால், அது ஒரு சம பக்க முக்கோண மென நிறுவுக.

14. ABC என்ற நேர்கோட்டில் $AB : BC = 1 : 2$. A, B, C என்ற புள்ளிகளை யொட்டி அத் தளத்தில் செயற்படும் சில விசைகளின் இயற்கூட்டுத் திருப்புத்திறன்கள் முறையே p, q, r அளவுள்ளன. $2p - 3q + r = 0$ என நிறுவுக.

15. $(3,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$ என்ற புள்ளிகளை யொட்டிச் சில விசைகளின் இயற்கூட்டுத் திருப்புத்திறன்கள் முறையே $10, -4, 12$ என உள்ளன. (கூட்டு) விளைவு விசை யென்ன? அது செயற்படும் கோட்டின் சமன்பாடென்ன?

பயிற்சி 8 (b)

1. ஒரு சீரான கழி (நீளம் $2a$) AB-னுடைய, A என்ற முனை ஒரு வழவழப்பான செங்குத்துச் சுவர் தாங்கப்பட்டு, மற்ற முனை ஒரு கயிறு கட்டி, அக் கயிற்றின் மற்றமுனை A-க்கு மேல் சுவரில் கட்டப்பட்டு அக்கழி நிற்கிறது. கயிறு நீளம் $3l$ எனக் கொண்டால், அக் கழி கிடைக் கோட்டிற்குச் சாய்ந் திருக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{9l^2 - 4a^2}{12a^2}\right)$ என நிறுவுக. (ப.க)

2. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான தூலத்தின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான செங்குத்துச் சுவர் மேல் பொருத்தப்பட்டிருக் கிறது. சுவருக்கு b தூரத்தில் உள்ள ஒரு கிடைக்கழி மேல் அத்தூலம் வைக்கப்பட்டு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது. அத்தூலம் கிடைக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ என நிறுவுக. (ப.க)

3. ஒரு வழவழப்பான அரைக்கோள வடிவிலுள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் ஒரு கழி (நீளம் அரைக்கோள ஆரம்) வைக்கப் பட்டு அசைவற்ற நிலையிலுள்ளது. பாத்திரத்தின் மேல் தளம் கிடைத்தளத்திலுள்ளது. கழியின் புவியீர்ப்பு மையம், கழியின் நீளத்தை 1:2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அக் கழி கிடைக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$ என

நிறுவுக. அது ஒரு சீரான கழியாயிருந்தால் என்னவாகும் எனக் காண்க.

4. மூன்ருவது கணக்கைப் பொதுப்படுத்துவோம்: கழியின் நீளம் $a+b$; புவியீர்ப்பு மையம் அக்கழியின் நீளத்தை $a:b$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. கோளத்தின் ஆரம் c; அப்போது அக் கழி கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{b-a}{2\sqrt{c^2-ab}}\right)$ என நிறுவுக. மூன்ரும் கணக்கில் ' ஈடு செய்து சரி பார்க்க.

5. ஒரு சீரான கழி வழவழப்பான அரைக்கோள வடிவப் பாத்திரத்தில் கொஞ்சம் உள்ளும், கொஞ்சம் வெளியே நீட்டிக் கொண்டுமிருந்தால், அது கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என நிறுவுக.

6. ஐந்தாம் கணக்கில், கழியின் நீளம், கோள ஆரத்திற்கு நான்கு மடங்கிற்கு மேல் நீளமாயிருந்தால், சிறிது உள்ளும், மீதி வெளியேயும் நீட்டிக் கொண்டும் இருக்க முடியாதென நிறுவுக. (ப.க)

7. ஒரு வழவழப்பான கோளம் ஒரு வழவழப்பான சுவரில் உதைந்து கொண்டிருக்கிற நிலையில் கெட்டியாகப் பொருத்தப் பட்டிருக்கிறது: ஒரு சீரான கழியின் ஒரு முனை சுவரின் மேல் உதைந்து கொண்டு அந்தக் கோளத்தைத் தொட்டு, நீட்டிக் கொண்டு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. கோளத்தின் ஆரம் a; கழியின் நீளம் l; கழி குத்துக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் θ; $a = 2l\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}$ என நிறுவுக. (ப.க)

8. 32 மீ. நீளமுள்ள ஒரு சீரான கழி 2 மீட்டர் விட்டமுள்ள ஒரு திறந்த வழவழப்பான உருளையால், சிறிது உள்ளும், சிறிது வெளியே நீட்டிக் கொண்டுமிருக்கிறது. உருளை கிடைத் தளத்தில் அசையாமல் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. கழியின் அசைவற்ற நிலையில் அது கிடைக்கோட்டிற்கு 60° சாய்வில் உள்ளதென நிறுவுக. (ப.க)

9. ஒரு சதுரமான பலகையின் ஒரு முனையை ஒரு வழவழப்பான செங்குத்துச் சுவரில் உதையவைத்து அதற்கடுத்த முனையில் ஒரு கயிறுகட்டி, அக் கயிறு சுவரில் இழுத்துக் கட்டப்

பட்டிருக்கிறது. கயிற்றின் நீளம் சதுரத்தின் நீளத்திற்குச்சமம். அக்கயிறு சுவரோடு $\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ அளவு சாய்ந்திருக்கிறதென நிறுவுக. மேலும், சதுரத்தின் மூன்று முனைகள் சுவரிலிருந்து இருக்கும் தூரங்கள் $1:3:4$ என்ற விகிதத்திலுள்ள வென நிறுவுக.

10. W எடையுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் மேல் வரம்பில் $\frac{1}{4}W$ எடையுள்ள ஒரு துகள் C என்ற புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. A என்ற புள்ளியிலிருந்து அத்தகடு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. தகட்டின் கீழ்ப்புள்ளி B. B–லிருந்து தொங்க விட்டால் A கீழ்ப்புள்ளியாகிறது. AB என்ற வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம் $2\cos^{-1}(\frac{1}{12})$ என நிறுவுக. (A, B ஐ யொட்டி திருப்புத்திறன்கள் காண்க)

11. $2a$ நீளம், எடை W உள்ள ஒரு கெட்டிக் கம்பி, A என்ற முனையில் ஒரு கீலில் இணைக்கப்பட்டு, அக் கீலை மையங் கொண்டு சுழல முடியும். B என்ற முனையில் P என்ற கிடைக் கோட்டு விசை செயற்பட்டு, அக் கம்பியைச் சாய்வாக இழுத்து நிற்கிறது. A–க்கும் B–க்கும் இடையான கிடைத்தூரம் $2b$. கீலில் செயற்படும் எதிர்விணை (விசை) $\frac{W}{2} \frac{\sqrt{4a^2-3b^2}}{a^2-b^2}$ என நிறுவுக. P என்ற விசையளவு $\frac{Wa}{2\sqrt{l^2-a^2}}$ என நிறுவுக.

12. AB, BC, CD, DA என்ற சதுரத்தின் பக்கங்களின் மேல் P, Q, P, Q என்ற விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசையும் மற்றொரு குறிப்பிட்ட விசையும் சேர்ந்து பெறப்படும் (கூட்டு) விளைவு விசை அச்சதுரத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லுமானல், அக் குறிப்பிட்ட விசை ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தைத் தொடும் தொடுவரை மேல் செயற்படுமென நிறுவுக. (ப.க)

13. ACB என்ற நீளமுள்ள $4a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கெட்டிக் கம்பி, ஒரு கிடைத்தளத்தில் பதிக்கப்பட்ட ஓர் அரை கோளத்தின் உள்ளே A என்ற முனையும், அரைக் கோள வரம்பில் C-ம், வெளியே CB என்ற பகுதி நீட்டிக்கொண்டும் இருக்கும் வகையில் நிற்கிறது. $CB = a$; கெட்டிக் கம்பிக்கும், கிடைத்தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 30°; கோள ஆரம் r; அப்போது $r = a\sqrt{3}$ என நிறுவுக. (ப.க)

14. ஒரே சீரர்ன இரு கெட்டிக் கம்பிகள் AB, BC என்பவை B-ல் இறுகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன; $\angle ABC = 90°$; A-லிருந்து இப் பிணைப்பு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. அசைவற்ற நிலையில் AB-க்கும் குத்துக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{b^2}{a^2+2ab}\right)$ என நிறுவுக. ($AB = a$, $BC = b$ எனக் கொள்க)

15. மூன்று வழவழப்பான கழிகள் ஒரு முக்கோணமாக இறுக இணைக்கப்பட்டு கிடைத்தளத்தில் இருக்கிறது. ஒரு சீரான பெரிய கோளம் அதன் மேல் வைக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு கழியின் எதிர்வினை (விசையும்) அக் கழியின் நீளத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

பயிற்சி 8 (c)

1. APC, BCP என்ற இரு கயிறு முனைகளில் P, P என இரு சம எடைகள் கட்டப்பட்டு, C என்ற முனைக்குச்சியில் மாட்டித் தொங்க விடப்படுகிறது. AB என்பது W எடையுள்ள ஒரு கனமான தூலம், அதன் பு. மையம் அதன் நீளத்தை a, b அளவுள்ள இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இவ் வமைப்பு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் போது, AB என்ற தூலம் கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம்

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$ என நிறுவுக.

தூலம் சீரானதானுல் என்னவாகும்?

2. ஒரு சீரான கோளம், இரு சாய்தளங்களின் நடுவில் அசைவற்றிருக்கிறது. ஒரு சாய்தளம் கிடைக் கோட்டிற்கு 60° சாய்விலுள்ளது. இத்தளத்தின் மேல் கோளத்தின் அழுத்தம் கோள எடையில் பாதியானுல், மற்ற சாய்தளம் கிடைக் கோட்டிற்கு 30° சாய்வில் உள்ளதென நிறுவுக.

3. இரு சமபக்க முக்கோணத் தகடொன்று, தனது சம பக்கங்கள் ஒரு கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு முனைக் குச்சிகளின் மேல் உதைந்து கொண்டு குத்து தளத்தில் அசைவற்று நிற்கிறது. முக்கோணத்தின் சம கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $(90-\alpha)$. முனைக் குச்சிகளுக்கிடைப்பட்ட கிடைத்தூரம் c.

முக்கோணத்தின் உயரம் h. அசைவற்ற நிலையில் முக்கோணத்தின் அச்சு, செங்குத்தாக இருக்கும் அல்லது செங்குத்துக் கோட்டிற்கு $\cos^{-1}\left(\frac{h \sin \alpha}{3c}\right)$ சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக.

4. சென்ற கணக்கில் முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக, $2a$ பக்கம் கொண்ட ஒரு சதுரம் அவ்விரு முளைக் குச்சிகளின் மேல் உதைந்து கொண்டு குத்து தளத்தில் அசைவற்று நிற்கிறது. அசைவற்ற நிலையில், ஒரு பக்கம் கிடைக்கோட்டிற்கு 45° அளவு சாய்விலாவது, $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)$ அளவு சாய்விலாவது நிற்குமென நிறுவுக.

5. மூன்ருவது கணக்கில் இரு சம பக்க முக்கோணத்திற்குப் பதிலாக, ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ABC நிற்கிறதெனக் கொள்க. A என்பது செங்கோணம்; AB, AC என்ற பக்கங்கள் முளைக் குச்சிகளில் உதைந்து கொண்டு நிற்கின்றன. AC என்ற பக்கம், கிடைக்கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்குமாறல்

$AC \cos\theta - AB \sin\theta = 3c \cos 2\theta$ என நிறுவுக.

6. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கழியின் அடி முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரில் உதைந்து கொண்டு அசைவற்ற நிலையில் பின் கூறப்படும் வகையில் பொருத்தப்படுகிறது. a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் ஒரு முனை, கழி உதைந்திருக்கும் முனையிலிருந்து b தூரத்தில் கட்டப்பட்டு, கயிற்றின் மற்ருெரு முனை, உதைந்திருக்கும் சுவரில் மேலே ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. செங்குத்துக் கோட்டிற்கும் கயிற்றுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் θ ஆனல், $\cos^2\theta = \frac{b^2(a^2 - b^2)}{a^2 l(2b - l)}$ என நிறுவுக.

7. a ஆரமும், W எடையும் உள்ள ஓர் அரைக் கோள திண்மம் ஒரு மேசை மேல் வைக்கப்பட்டு, அதன் வரம்பின் முனையில் ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு அக்கயிற்றின் மற்ருெரு முனை மேசையில் இழுத்துக் கட்டப்படுகிறது. அக்கயிறு நீளம் $l < a$ ஆகும். அரைக்கோளம் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது, கயிற்றிலுள்ள இழு விசை $\frac{3}{8} W \frac{a - l}{\sqrt{2al - l^2}}$ என நிறுவுக.

8. ஒரு கழியின் பு. மையம் அதன் நீளத்தை 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. இரு முனைகளிலும் ஒரு மீள் இயல்பற்ற

ஒரு கயிறு கட்டி, அக்கயிறு ஒரு மூலைக் குச்சியிலிருந்து மாட்டித் தொங்கவிடப் படுகிறது. கயிறு கழி நீளத்தைப் போல் $\sqrt{3}$ அளவு நீளமுடையது. கழியானது கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் 30° என நிறுவுக.

9. PQ என்ற ஒரு வழவழப்பான கம்பி செங்குத்தாக நிலை நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு கழி முனையில் ஒரு வழவழப்பான வளையம் மாட்டப்பட்டு, அவ்வளையம், PQ-ன் மேல் நழுவி வர முடியும். அம் கம்பியிலிருந்து c தூரத்தில் ஒரு உருளை தனது அச்சு கிடைக்கோட்டிலுள்ளவாறு நிலை நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. அக் கழி அவ் வுருளையைத் தொட்டு மேலும் நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறது. அசைவற்ற நிலையில், அக் கழி கிடைக்கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்குமானால், அக் கழியின் நீளம் $2 \sec^3 \theta\,(c - r \sin \theta)$ என நிறுவுக. இங்கு r என்பது அவ் வுருளையின் ஆரமெனக் கொள்க.

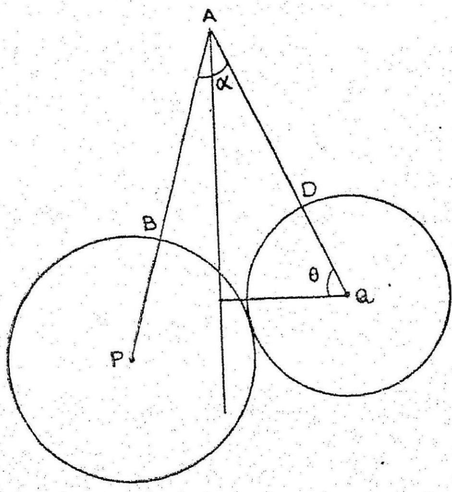
10. $2a$ நீளமும் W எடையும் உள்ள ஏணியின் பு. மையம் கீழ் முனையிலிருந்து $\frac{3}{4}a$ தூரத்திலிருக்கிறது. இம் முனை வழவழப்பான தரையில் உதைந்து கொண்டும், மற்றொரு முனை செங்குத்தான, வழவழப்பான சுவரில் உதைந்து கொண்டு நிற்கின்றன. இந்த நிலையில் நிறுத்துவதற்காக ஏணியின் மையத்தில் l நீளமுள்ள ஒரு கயிறு கட்டி, அக்கயிறு கிடைக்கோட்டில் சுவரில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. கயிற்றின் இழு விசை $\dfrac{3Wl}{4\sqrt{a^2 - l^2}}$ என நிறுவுக.

11. இரு சமமான வழவழப்பான கோளங்கள் (ஆரம் 5 செ.மீ.) 15 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு குழிவான அரைக் கோளத்தினுள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோளங்கள் ஒன்றையொன்று அழுத்திக் கொள்ளும் விசை ஒரு கோள எடையைப் போல் $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ மடங்கு என நிறுவுக.

12. இரு சமமான கனமான உருளைகள், (ஆரம் a) ஒரு பொள்ளலான உருளையின் உள் வரம்பில் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவ்வுருளையின் ஆரம் $b\ (> 2a)$. இரு உருளைகளின் மேல் அதே போல் மற்றோர் உருளை மெதுவாக வைக்கப்படுகிறது. எல்லா உருளைகளின் அச்சுகளும் இணை கோடுகளிலுள்ளன. $b > a(1 + 2\sqrt{7})$ என்ற நிலை இருந்தாலொழிய, கீழிருக்கும் உருளைகள் ஒன்றையொன்று பிரியாது நிற்குமென நிறுவுக.

13. பின்வரும் படத்தில் (படம் 8-10)ல் காட்டியபடி இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் வகையில் A என்ற ஆணியிலிருந்து AB, AD என்ற கயிறுகளால் கட்டித் தொங்க விடப்பட்டிருக்கிறது. உருளைகளின் மையங்கள் P, Q; ஆரங்கள் r_1, r_2; எடைகள் W_1 W_2; $AB = l_1$ $AD = l_2$; $l_1 + r_1 = l_2 + r_2$;

$\angle PAQ = \alpha$; AQ-க்கும் கிடைக்கோட்டிற்கு மிடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{W_1 \cos + W_2}{W_1 \sin \alpha}\right)$ என நிறுவுக.



படம் 8-10.

14. மூன்று உருளையான வழவழப்பான பென்சில்கள் ஒரு கயிற்றினால் சுற்றிக் கட்டப்பட்டு ஒரு வழவழப்பான மேசை மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. பென்சில்களுக்கிடையே உள்ள அழுத்தம் P; ஒரு பென்சிலின் எடை W; கயிற்றின் இழு விசை $P + \frac{3\ W}{2\ \sqrt{3}}$ என நிறுவுக.

15. W எடையும், $2l$ நீளமும் உள்ள ஒரு கழி A என்ற முனையில் ஒரு கீலோடு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு வழவழப்பான வளையம், எடை $\frac{W}{2}$, அக்கழியின் மேல் தவழ முடியும். A வழியாக உள்ள ஒரு கிடைக்கோட்டில் C என்ற ஆணி இருக்

கிறது. $AC=l$. C என்ற ஆணியில் l நீளமுள்ள ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டு, அக் கயிற்றின் மறுமுனை கழி மேலிருக்கும் வளையத்தோடு கட்டப்படுகிறது. அசைவற்ற நிலையில் வளையம், கழியின் மையத்திலிருக்குமெனவும், கீலில் எதிர்விசை $\frac{W\sqrt{3}}{2}$ எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{W\sqrt{3}}{2}$ எனவும், வளையத்தில் செயற்படும் எதிர்விசை $\frac{W}{2}$ எனவும் நிறுவுக.

16. சென்ற கணக்கு 15-ல் வளைய எடை nW எனப் பொதுப்பட எடுத்துக்கொண்டால், $2W\sin^2\theta=\cos\theta(1+2n\cos\theta)$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{W(1+2n\cos\theta)}{\cos\theta}$ எனவும் வளையம் தங்குமிடம் A-லிருந்து $2l\cos\theta$ தூரத்திலிருக்குமெனவும் நிறுவுக.

17. ஒரு வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ல், AB ஒரு விட்டமாகும். அதன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA-ன் மேல் முறையே P, Q, R, S, என்ற விசைகள் செயற்பட்டு, அசைவற்ற நிலை உருவாகிறது.

$$R^2=P^2+Q^2+S^2+\frac{2PQS}{R}$$ என நிறுவுக.

18. மூன்று சம நீளம், சம எடை W உள்ள கனக் கம்பிகள் ABC என்ற ஒரு முக்கோணமாக வழவழப்பான கீல்களால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. BC-ன் மையப்புள்ளி ஒரு வழ வழப்பான ஆணியின் மேல் நிறுத்தப்பட்டு, முக்கோணம் குத்து தளத்தில் அசைவற்று நிற்கிறது. A என்ற கீலில் செயற்படும் எதிர்வினை $\frac{\sqrt{3}}{3}W$ என நிறுவுக.

19. சென்ற கணக்கு 18-ல் கூறப்பட்ட முக்கோணத்தின் AB, AC-ன் மையப் புள்ளிகள் முறையே D, E. இப்புள்ளிகள் ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு வழவழப்பான ஆணிகள் மேல் வைக்கப்பட்டு, BC என்ற கம்பி, DE-க்குக் கீழே இருக்கிறது. (DE என்ற ஆணிகளுக் கிடைப்பட்ட தூரம் $\frac{1}{2}BC$). A-ல் செயற்படும் எதிர் விசை $\frac{5}{6}\sqrt{3}\,W$ எனவும், B, C என்ற கீல்களில் செயற்படும் எதிர்விசைகள் $\frac{1}{6}\sqrt{57}\,W$ எனவும் நிறுவுக.

20. மூன்று சமச் சீரான, மிக இலேசான கழிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணமாக வழவழப்பான கீல்களால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ABC என்ற அம் முக்கோணத்தில் $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$. A-என்ற முனையிலிருந்து இம் முக்கோணம் குத்து தளத்தில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. மேலும் B–லும், C-லும் W, 2ω என இரு எடைகள் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. AB என்ற கழி கிடைக்கோட்டிற்கு $\tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ அளவு சாய்ந்து இவ் வமைப்பு அசைவற்ற நிலையிலிருக்குமென நிறுவுக.

9. உராய்வு

(Friction)

9·1. வழவழப்பான பொருள்கள்

ஒரு வழப்பான மரக்கட்டை ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மேல் இருக்கும் போது, அக் கட்டையை நாம் நகர்த்த முயன்ருல், ஒரு சிறு எதிர்ப்பு இருப்பதைக் காணலாம். எவ்வளவு வழவழப்பாக இவ்விரு பொருள்களும் இருக்குமாயினும், நகர்ச்சிக்குச் சிறு எதிர்ப்பு இருக்கத்தான் செய்யும். இது இயற்கையில் நாம் பார்க்கும் நிகழ்ச்சி. எனவே, இரு பொருள்களுக்குமிடையே ஒரு விசை செயற்படவேண்டும். இதுவே அச்சிறு எதிர்ப்புக்குக் காரணமாயிருக்கவேண்டும்.

9–1.1 ஆனல், அவ்விரு பொருள்களும் சீர்மையான அல்லது முழுக்க முழுக்க வழவழப்பான பொருள்களாயிருப்பின் இவ்வெதிர்ப்பு விசை இராது என்பது **கொள்கை.** அந் நிலையில் அவ்விரு பொருள்களுக்கு மிடையே, ஒரு வினையும், அதற்குச் சமமாக எதிர்த் திசையில் மற்ருெரு எதிர் வினையும் **மட்டுமே** செயற்படும். மரக் கட்டை தன் எடையளவு விசையுடன் மேசையை அழுத்தும்; மேசை அதே எடையளவு எதிர் விசையுடன் கட்டையை அழுத்தும். இதுவே நியூட்டன் மூன்ரும் விதிப்படி நடக்கும் இரு வினைகளாகும்—அதாவது அழுத்தம், எதிர் அழுத்தம், இரண்டும் இவ்விரு விசைகளும் (வினைகளும்) ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் பரப்பிற்குப் பொதுச் செங் கோட்டில் செயற்படும் (along the common normal at the point of contact) இந்த அடிப்படையில் "சீர்மையான வழவழப்பான" (complete smoothness) என்பதற்கு ஒரு வரையறை வகுக்கலாம்.

வரையறை: இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டு அல்லது அழுத்திக் கொண்டிருக்கும் போது, அவை சீர்மையயான வழவழப்பு பெற்றிருப்பின், அவற்றிற்கிடையே செயற்படும் வினையும் (விசையும்/அழுத்தமும்) எதிர்வினையும் (எதிர் விசையும்/எதிர் அழுத்தமும்) அவ்விரு பொருள்களும் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் பொது வான மேற்பரப்புக்குச் செங்குத்தான திசையில் செயற் படும்; வேறெந்த விசைகளும் செயற்படா.

9–2. **உராய்வு:** சீர்மையான வழவழப்பு என்பது ஒரு கற்பனைப் பண்புதான். சீர்மையான வழவழப்பு இயற்கையில் அமைவதில்லை. செயற்கையிலும் அமைவதில்லை. நடைமுறையில் எவ்வளவுதான் நாம் ஒரு பொருளைத் தேய்த்துத் தேய்த்துத் அதன் சொர சொரப்பை நீக்க முற்பட்டாலும், கொஞ்சம் சொர சொரப்பு இருக்கத்தான் செய்யும். வழவழப் பான கண்ணாடிக்குக் கூட கொஞ்சம் சொர சொரப்பு உண்டு.

எனவே, ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளைத் தாங்கி நிற்கும் போது அல்லது ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருள் மேல் அமைதி நிலையில் இருக்கும் போது, ஒன்று மற்றொன்றின் மேல் தவழ்ந்து நகராமலிருக்கும் பொருட்டு ஒரு விசை செயற் பட்டுக் கொண்டேயிருக்கிறது. இதுவே 'உராய்வு விசை' எனப் பெயரிடப்படுகிறது.

உராய்வு: வரையறை: இரு பொருள்கள் ஒன்றை தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது, ஒன்றின்மேலொன்று தவழ்ந்து நகராதிருக்கும் வண்ணம், அவ்விரு பொருள்களுக் குமிடையே இயற்கையாகச் செயற்படும் உள் விசையே உராய்வு விசை எனப்படும். அவ்வியற்கை நிகழ்ச்சி உராய்வு எனப்படும்

அன்றாட வாழ்க்கையில் இவ் வியற்கை விசைக்குப் பெரிய தொரு பங்குண்டு. நாம் நடக்கும் போது, நமது கால்கள் பின் னோக்கிச் சறுக்க ஏதுவுண்டு; இதைத் தடுத்து நமக்கு நடக்க உதவி செய்வது உராய்வு விசையாகும். இது நமது கால் களுக்கும் தரைக்கும் இடைப்பட்ட உள்–விசையாகும். நாம் ஈரக் களிமண் தரையில் நடக்கும் போது சறுக்கி விழாமல் எச் சரிக்கையாக நடக்கிறோம்; ஈரமாயிருக்கும் பளிங்குத் தரைமேல் நடக்கும் போதும் எச்சரிக்கையாய் நடக்கிறோம். இந்தத் தரைகள் வழவழப்பாயிருப்பதின் காரணமாக, உராய்வு விசை

குறைவு; ஆகையால், கால்களை அழுத்தி வைத்து நடக்க வேண்டும்; இல்லையேல் சறுக்கி விழ ஏது உண்டு.

அவ்வாறே ஒரு மோட்டார் வண்டி தரையின் மேல் ஓட, மோட்டார் சக்கரத்திற்கும் தரைக்கும் ஒரு பிடிப்பு இருக்க வேண்டும். வழவழப்பான தரையில் இப்பிடிப்பு குறைவு; கொஞ்சம் சொரசொரப்பாகத் தரையிருந்தால் மோட்டார் சறுக்காமல் ஓட முடியும். இரயில் வண்டியும் சற்று சொர சொரப்பான தண்டவாளங்கள் மேல்தான் ஓட முடியும். தண்டவாளங்கள் மிகவும் வழவழப்பாக இருப்பின், சக்கரங் கள் சுற்றுமே யொழிய வண்டி முன்னேற முடியாது போகும். இதற்கெல்லாம் உதவி செய்வது தரை அல்லது தண் டவாளத்தில் இயற்கையாக அமைந்துள்ள உராய்வுப் பண்பு தான். இவ்வாறே, இவ் வுராய்வுப் பண்பு செயற்படாவிடின், ஏணியை நிலத்தில் வைத்து, சுவரில் சாய்த்து நாம் ஏற முடி யாது. மரத்திலோ சுவரிலோ, ஆணி அடிக்க முடியாது. இன் னோரன்ன பலப் பல அன்றாட செயல்களைச் செய்து முடிக்க இயற்கையிலமைந்த உராய்வுப் பண்பு உதவி செய்கிறது.

9–2.1. ஓர் இரும்புத்துண்டை ஒரு மேசை மேல் வைத்து, அதற்கு ஒரு கயிறு கட்டி, அத்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் வழி யாகச் செல்லக் கூடிய ஒரு கிடைக்கோட்டில் மிகச் சிறிய விசை கொண்டு அக்கயிற்றினை இழுப்போமானால், அப் பொருள் நகராமல் தடுக்க ஓர் எதிர்ப்பு விசை செயற்படுவதை நாம் காணலாம்; பொருள் அசைவற்றிருக்கும். அச்சமயம் அவ் வெதிர்ப்பு விசை (உள்விசையான உராய்வு விசை) நாம் செயற்படுத்தும் சிறிய விசைக்குச் சமமாய் நேரெதிர்த்திசை யில் செயற்பட்டு பொருளை அசைவற்ற நிலையில் நிறுத்துகிறது. சிறிது சிறிதாக நாம் இருக்கும் விசையை மிகுதிப்படுத்தினல், எதிர்ப்பு விசையும் அதற்கு நேரெதிர்த் திசையில் தன்னைச் சமமாக்கிக்கொண்டு பொருளை அசைவற்ற நிலையில் நிறுத்தி வைக்கிறது. நாம் இழுக்கும் விசையைச் சிறிது சிறிதாக மேலும் மிகைப்படுத்திக்கொண்டே போவோமானல். உள்விசையான இயற்கை உராய்வு விசையும் வளர்ந்து, ஒரு நிலையில் பொருள் நகரத் தொடங்குகிறது. அப்படி நகரத் தொடங்கும்போது, உள்விசை தனது மீப்பெரு மதிப்புப்பெறுகிறது. அதற்கு மேல் உள்விசை வளரமுடியாத நிலையில், வெளி இழுக்கும் விசையின் கை ஓங்கி பொருள் நகர ஆரம்பிக்கிறது. இதுவே படிப்படியாக நாம் இழுக்கும்போது இயற்கையின் அடிப்படை யில் தோன்றும் நிகழ்ச்சிகளாகும். இவற்றையெல்லாம் பாகு

படுத்திக் கூர்ந்து ஆராய்ந்து பார்த்தால், வெளியிழுக்கும் விசைக்கு உராய்வு விசை தன்னைச் சமமாக்கிக்கொள்ளும் வகையில் வளர்ந்து சென்று, ஓர் உச்ச நிலையை அடைந்து, அதற்குமேல் வளரமுடியாமல் பொருள் நகர்வதற்கு இடந் தருகிறது என்பது புலனாகிறது.

இவ்வாறான எல்லாப் பண்புகளையும் நாம் உற்றுநோக்கிப் பாகுபடுத்துங்கால், உராய்வு பற்றி பின் கூறப்படும் பரிசோதனை வழி விதிகள் (Experimental Laws) பெறப்படுகின்றன. (இவை கணக்கியல் முறையில் நிறுவப்படக்கூடிய விதிகளல்ல; நடைமுறையில் பரிசோதனைகள் மூலம் பெறப்பட்டனவே.)

9-2.2. உராய்வு விதிகள்

(1) இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது, ஒரு பொருள் மற்றொன்றின் மேல் நகர முயற்படும் திசைக்கு நேரெதிர்த் திசையில் உராய்வு விசை செயற்படுகிறது.

(2) பொருள் அசைவற்ற நிலையில் இருக்கும்வரையில், உராய்வு விசை, பொருள் நகராமல் இருக்கும் அளவுக்குச் செயற்படுகிறது. வெளிவிசை வளர்வதன் விளைவாக ஒரு பொருள் நகர முற்படும் சமயம், உராய்வு விசை தனது மீப்பெரு அளவை யடைகிறது. அதற்கு மேற்பட்டு அந்தச் சூழ்நிலையில் உராய்வு விசை வளர இயலாது. அப்படியான உராய்வு விசையின் மீப்பெரு அளவு, உராய்வெல்லை (விசை) (Limiting Friction) எனப் பெயர்படும். அந்த நிலையில், உள்ள அசைவற்ற நிலை "அசைவற்ற நிலை எல்லை" (Limiting Equilibrium) எனப்படும்.

(3) உராய்வெல்லையின் அளவு, செங்கோட்டு எதிர் வினை (விசை) க்கு ஒரு மாறிலித் தகவுப் பொருத்தமுடையது; இம் மாறிலித் தகவு, இரு பொருள்களின் தன்மைகளை மட்டுமே (வழ வழப்பு அல்லது சொர சொரப்புத் தன்மைகள்) சார்ந்ததாகும்.

(இம் மாறிலித் தகவு $= \dfrac{\text{உராய் வெல்லை விசை}}{\text{செங்கோட்டு எதிர்விசை}}$; இம்மாறிலி அவ்விரு பொருள்களுக்கிடைப்பட்ட உராய்வுக் கெழு (Coefficient of Friction) எனப்படும்.

(4) உராய் வெல்லையின் அளவு, தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் பரப்பளவு அல்லது பொருள்களின் உருவங்களைச் சார்ந்ததல்ல; செங்கோட்டுத் திசையில் செயற்படும் எதிர் வினை (விசை) யை மட்டுமே அவ்வெல்லையளவு சார்ந்திருக்கும்.

(5) பொருள் ஒன்றின் மேலொன்று நகர்த்து செல்லும் போதுகூட அவ்வுராய்வு விசை நகர்ச்சியை எதிர்த்து நிற்கிறது; ஆனால், பொருளின் வேகத்திற்கும் அவ்வுராய்வு விசைக்கும் ஏதும் தொடர்பில்லை.

9-2·3. ஆனால் நகர்ந்து செல்லும்போது, செயற்படும் உராய்வு விசைக்கும் செங்கோட்டு எதிர்வினை (விசை) க்குமுள்ள பொருத்தத் தகவு நகர ஆரம்பிக்கும் சமயம் உள்ள பொருத்தத் தகவிற்குச் சிறிது குறைவாகும்.

9-2.3.1. நிலையியல் உராய்வு: ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின்மேல் அமைதியாயிருக்கும்போது, இவ்விரு பொருள்களுக்கிடையே செயற்படும் உள்விசை நிலை உராய்வு (Statical Friction) எனப்படும்.

9-2.3.2. இயங்கியல் உராய்வு: ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின்மேல் தவழ ஆரம்பித்து நகர்ந்து செல்லும் போது, நகர்ச்சியை எதிர்த்துச் செயல்படும் உள்விசை இயங்கு உராய்வு (Dynamical Friction) எனப்படும். இது எல்லை உராய்வைவிடச் சற்று சிறிதாக இருக்கும்; எனவேதான், ஐந்தாம் விதியின் பிற்பகுதி.

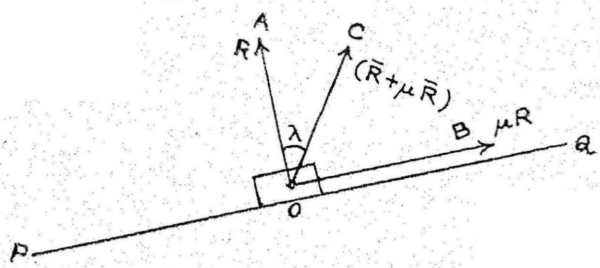
9-2.4. இவை யாவும் பரிசோதனை முறையில் நிறுவப்பட்ட விதிகளாகும். பரிசோதிக்கும் முறைகள் இயற்பியல் நூல்களில் விளக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். உராய்வுக்கெழு எனக் குறிப்பிட்ட மாறிலி விகிதம் உரிய அட்டவணைகளில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் (Rankine: Machinery and miliwork). உராய்வுக்கெழு எப்போதும் ஒன்றுக்குக் குறைவான ஒரு கூட்டு பின்னமாகவிருக்கும். அது சாதாரணமாக μ என்ற குறியீட்டால் அறிவிக்கப்படும். எனவே, R என்ற செங்கோட்டு எதிர் வினை (விசை) செயற்படும்போது, ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருளின் மேல் தவழ ஆரம்பிக்கும் சமயம் செயற்படும் உராய் வெல்லை விசையின் மதிப்பு μR எனவாகும்.

$\mu = 0$ ஆனால் (நடைமுறையில் ஆகாது) உராய்வெல்லை விசை பூச்சியம். இது நாம் கற்பனையால் காணக்கூடிய சீர்மை

யான வழ வழப்பைக் குறித்து நிற்கும். ஒரு பொருள் மற்ருெரு பொருளின் மேல், மற்றவெளி, உள்விசைகள் செயற்படினும் நகராது இருக்கும்வரை, செயற்படும் உராய்வு விசை $F<\mu R$ ஆகவிருக்கும். நகர ஆரம்பிக்கும்போது. அதாவது உராய் வெல்லை விசை செயற்படுகிறதாகையால், $F=\mu R$ ஆகிவிருக்கும்- வேறு முறையில் இதைக்கூறுவோமாஞல் ''அசைவற்ற நிலை எல்லை'' என்ற நிலையில்தான் μR-க்குச் சமமான F செயற்படு கிறது; மற்ற நிலைகளில் அசைவற்றிருக்கும்போது μR-க்குக் குறைவான F மட்டுமேதான் செயற்படுகிறது. உராய்வு விசை செயற்படும்காலை இவ்விரு பாகுபாடுகள் அல்லது வேறு வேருன நிலைகள் உள்ளன என்பது நமது கவனத்திலிருக்க வேண்டும்.

9-2.5. (கூட்டி) விளைவு எதிர்வினை (விசை) (Resultant Reaction)

ஒரு பொருள் மற்ருென்றின்மேல் அசைவற்ற நிலை எல்லையில் இருக்கும்போது, உராய்வெல்லை விசை, செங்கோட்டு எதிர்விசை இரண்டிற்கும் (கூட்டு) விளைவு விசை கண்டால் இக்(கூட்டு) விளைவு விசையானது (கூட்டு) விளைவு எதிர்விசை (Resultant Reaction) எனப்படும். இவ்விசைக்கும் செங்கோட்டு எதிர்விசைக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் உராய்வுக்கோணம் (Angle of friction) எனப்படும். பின்வரும் விளக்கம் காண்க. (படம் 9-2.5.)



படம் 9-2.5.

OA வழியாகச் செங்கோட்டு எதிர்விசை $\bar{R}$ செயற்படுகிறது. பொருள் OP என்ற திசையில் நகரவிருக்கும் தருணம் μR என்ற அளவுடைய உராய்வெல்லை விசை OQ என்ற திசையில் செயற்-

படுகிறது. $\bar{R} + \mu \bar{R}$ என்ற (கூட்டு) விளைவு விசைதான் (கூட்டு) விளைவு எதிர்விசை எனப்படும்; செயற்படும்கோடும், திசையும் இணைகர விதிப்படி, OC என்ற திசையில் செயற்படுவதாகக் கொள்வோம்.

$$\text{(கூட்டு) விளைவு எதிர்விசையளவு } S = \sqrt{R^2 + \mu^2 R^2}$$
$$= R\sqrt{1 + \mu^2}$$

இவ்விசை S, செயற்படும் கோடு OC என்பதற்கும், செங்கோட்டு எதிர்விசை செயற்படும் கோடு OA என்பதற்கும் இடைப்பட்டகோணம் AOC என்பதுதான் உராய்வுக்கோணம் எனப்படும்.

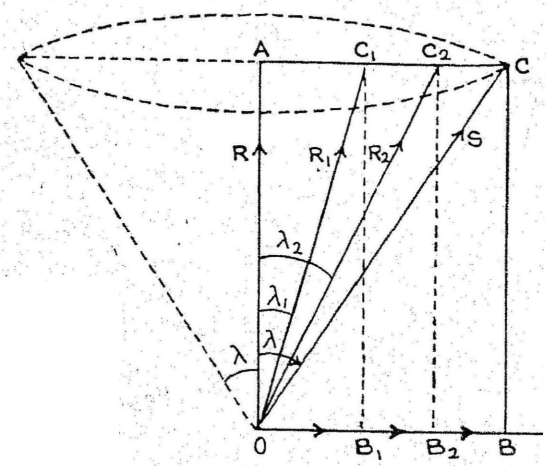
$$\lambda = \hat{AOC} \text{ எனக்கொண்டால்,}$$

$$\tan \lambda = \frac{\mu R}{R} = \mu \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

எனவே $\lambda = \tan^{-1}(\mu)$ என்ற உண்மை பெறப்படுகின்றது. இக் கோணத்தின் உட்பொருளை அடுத்தபடி ஆராய்வோம்.

9–2.6. உராய்வுக் கூம்பு (Cone of friction)

உராய்வு எல்லையின் மீப்பெரு மதிப்பு μR என்றபடியால்



படம் 9-௨.6.

(கூட்டு)விளைவு எதிர்விசைக்கும், செங்கோட்டு எதிர்விசைக்கும் இடைப்பட்டகோணம் λ-க்கு மிகுதியாக வளரமுடியாது.

இந்த உண்மையை படம் 9-2.6. கொண்டு விளங்கிக் கொள்க.

$$\bar{R} = \overline{OA}$$

$$OB_1 = F_1 < \mu \mid \bar{R} \mid$$

$$OB_2 = F_2 < \mu \mid \bar{R} \mid$$

$$OB = \mu \mid \bar{R} \mid$$

உராய்வு விசையானது தன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறும் வரையில் பொருள் மேல் செயற்படும் விசைகளுக்குத் தக்க வாறு தன்னை மாற்றிக் கொண்டு பொருளை அசைவற்ற நிலையில் வைத்திருக்கக் கூடிய பண்புடையது என நாம் அறிவோம். முதலில் $F_1 < \mu R$ என்ற உராய்வு விசை செயற்படுங்கால் R, F_1 இரண்டின் (கூட்டு) விளைவு விசை OC_1 என்ற திசையில் செயற்படும்; $\angle AOC_1 = \lambda_1$ எனக் கொள்வோம். பிறகு $F_2 < \mu R$ என்ற உராய்வு விசை செயற்படுங்கால் R_1, F_2 இரண்டின் (கூட்டு) விளைவு விசை OC_2 என்ற திசையில் செயற் படும்; $\angle AOC_2 = \lambda_2$ எனக் கொள்வோம். பிறகு உராய் வெல்லை μR செயற்பட்டு, பொருள் நகர ஆரம்பிக்குங் கால்,

R, μR இரண்டின் (கூட்டு) விளைவு விசை OC என்ற திசையில் செயற்படும்; அப்போது

$\angle AOC = \lambda = \tan^{-1} \mu$ என நாம் 9–2.5.–ல் பார்த்தோம்.

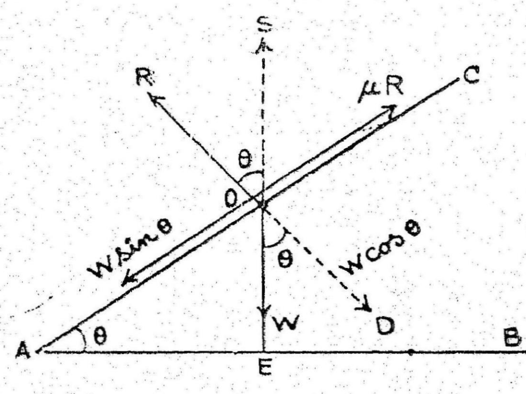
எனவே, இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்போது, செங்கோட்டு விசைத் திசையான OAஐ அச்சாகக் கொண்டு, மையக் கோணம் λ $(= \tan^{-1} \mu)$ பெற்ற ஒரு கூம்பினைப் பிறப்பித்தால், அதன் உட்புறத்திலோ அதன் வெளிப் பரப்பின் மேலோ (கூட்டு) விளைவெதிர் விசையின் திசை பெறப்படும். அசைவற்ற நிலையில் கூம்பி னுள்ளும், அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் கூம்பின் பரப்பின் மேலும் அவ்விளை வெதிர்விசை செயற்படும். கூம்பிற்கு அப்பாற் பட்டு அவ் விளைவெதிர் விசை செயற்பட இயலாது. எனவே, இக் கூம்பினை **உராய்வுக்கூம்பு** எனக் கூறுவது மரபு.

வரையறை : தொடுமிடத்தை உச்சியாகக் கொண்டு, செங்கோட்டு எதிர்விசை செயற்படும் கோட்டினை அச்சாகக் கொண்டு உராய்வுக் கோணத்தை அரை மையக் கோண

மாகக் கொண்டு பிறப்பிக்கப்படும் கூம்பே, அச்சூழ்நிலையின் அடிப்படையில் பெறப்படும் உராய்வுக் கூம்பு எனப்படும். பின்வரும் அட்டவணையில் சில பொருள்களின் உராய்வுக் கெழு, உராய்வுக் கோணம் ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன:

பொருள்	μ-உராய்வுக் கெழு	λ-உராய்வுக் கோணம்
மரத்தின் மேல் மரம் (உலர்ந்த நிலை)	2·5 முதல் ·5 வரை	14° முதல் $26\frac{1}{2}$° வரை
மரத்தின் மேல் (சோப் தடவப்பட்டது)	·04 முதல் ·2 வரை	2° முதல் $11\frac{1}{2}$° வரை
உலோகத்தின் மேல் உலோகம் (உலர்ந்த நிலை)	·15 முதல் ·2 வரை	$8\frac{1}{2}$° முதல் $11\frac{1}{2}$° வரை

9-3. **தேற்றம் 1: ஒரு சொர சொரப்பான சாய்வு தளத்தின் மேல் அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் ஒரு பொருள்**



படம் 9-3.

(கீழே சரிவதற்கு ஆயத்தமாக) இருக்கிறது. பொருளின் எடை தவிர வேறொரு வெளி விசையும் செயற்படாதிருப்பின், சாய்தளத்தின் சாய்வு, உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

θ கோணச் சாய்வில் AC என்ற சாய்தளம் உள்ளது. AB கிடைத்தளக் கோடு; தளமும் பொருளும் சீர்மையான வழ வழப்பாயிருப்பின், சாய்தளத்தின் மேல் பொருள் நிற்காது. $g \sin\theta$ என்ற முடுக்கத்தோடு கீழே இறங்கும் என நாம் அறிவோம். O என்ற பொருள், W எடை பெற்றது, சாய்தளத்தின் மேல், அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் இருக்கிறது. W என்ற எடை (விசை) O–ல் கீழே குத்துக் கோட்டில் (OE–ல்) செயற்படும். சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, OR என்ற திசையில் R என்ற செங்கோட்டு எதிர்விணை (விசை) செயற்படும். RO–ன் நீட்டல் OD எனக் கொள்க. W என்ற விசையை சாய்தளத்தின் மேலும், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் பிரித்தால், அதன் பிரித்த பகுதிகள்

$$W \sin\theta \quad - \quad \overrightarrow{OA} \text{ வழியாக}$$
$$W \cos\theta \quad - \quad \overline{OD} \text{ வழியாக}$$

பொருள் அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் நிற்பதால், உராய் வெல்லை விசை μR என்பது OA என்ற திசைக்கு (அதாவது பொருள் நகரக்கூடிய திசைக்கு) எதிர்த் திசையில் OC வழியாக செயற்படும். அசைவற்ற நிலை காரணமாக உள்ள

கட்டுப்பாடுகள் (1) $\mu R = W \sin\theta$

(2) $R = W \cos\theta$

$\therefore \quad \mu = \tan\theta$ எனப் பெறப்படும்.

ஆனல், tan (உராய்வுக் கோணம்) $= \mu$ என்பது வரையறை.

எனவே, $\theta =$ உராய்வுக் கோணம் எனப் பெறப்படும்.

மாற்றுமுறையாக, O என்ற (பொருளின் மேல்) புள்ளியில் $R, \mu R, W$ என்ற மூன்று விசைகள் இயங்கி அசைவற்ற நிலையில் இருக்கின்றன. எனவே, இலாமித் தேற்றப்படி,

$$\frac{W}{\sin ROC} = \frac{\mu R}{\sin EOD} = \frac{R}{\sin AOE}$$

அதாவது $$\frac{W}{\sin 90} = \frac{\mu R}{\sin\theta} = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\therefore \frac{\mu R}{R} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$\mu = \tan\theta$ எனவும் பெறலாம்.

மற்று மொருமுறை : R, μR இரண்டின் (கூட்டு) விளைவு விசையான S என்ற விசையானது, R என்ற விசை செயற்படும் கோட்டிற்கு λ (உராய்வுக் கோணம்) அளவிற்குச் சாய்ந்திருக்குமென நாம் அறிவோம். அசைவற்ற நிலைக்கு W–ம் S–ம் நேரெதிர்த் திசைகளில் ஒரே நேர்க் கோட்டில் செயற்பட வேண்டும். எனவே $\theta = \lambda$ எனவும் படத்தில் கண்டு கொள்ளலாம்.

மேற்கூறிய தேற்றத்தின் அடிப்படையில், உராய்வுக் கோணத்தை அமைதிக் கோணம் (angle of repose) எனக் கூறுவதுண்டு.

குறிப்பு : மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து பின் கூறப்படும் முடிவுகளுக்கு நாம் வர முடியும்.

(1) சாய்தளம், கிடைக்கோட்டிற்கு λ–க்கு குறைவான ஒரு கோண அளவு சாய்ந்திருப்பின் $(\theta < \lambda)$ பொருள் சாய் தளத்தின் மேல் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும். (அசைவற்ற நிலை **யெல்லை** அல்ல);

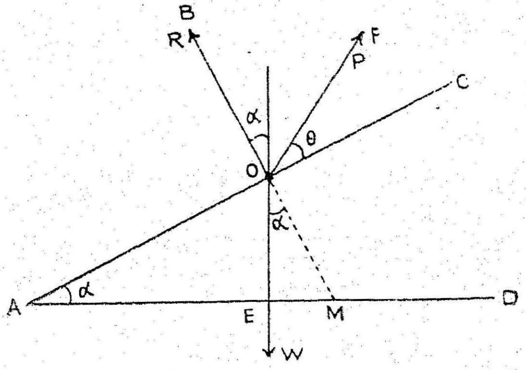
(2) இந்த நிலையிலிருந்து சிறிது சிறிதாக நாம் சாய்தளத்தின் சாய்வை மிகுதிப் படுத்திக் கொண்டு போனால், பொருள் தொடர்ந்து அசைவற்ற நிலையிலேயே யிருக்கும். $(\theta < \theta_1 < \lambda)$

(3) சாய்தளத்தின் சாய்வு λ என்ற மதிப்பை நெருங்கி நெருங்கி வந்து, λ–க்குச் சமமாகும் நிலையில் பொருள் நகர ஆரம்பிக்கும்.

(4) λ-க்கு மேல் சாய்தளச் சாய்வு அதிகமானல், பொருள் கீழே நகர்ந்து செல்லும். இந்த நிலையில் நாம் அப் பொருளை அசைவற்ற நிலையில் நிறுத்த வேண்டுமானல், வேறு ஒரு விசையை அப் பொருளின் மேல் செயற்பட வைத்து நிறுத்த முடியும். அடுத்த பத்தியில் பார்ப்போம்.

9–3.1. உராய்வுக் கோணத்திற்கு அதிகமான ஒரு கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் மேல் ஒரு பொருள் வைக்கப் பட்டு, சாய்தளத்திற்கு θ சாய்வு பெற்ற திசையில் P எனும் ஒரு விசை செயற்படுவதால் அப்பொருள் அசைவற்ற நிலை எல்லையில் நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. P–ன் மதிப்பு பற்றி நாம் ஆராய்வோம்.

(படம் 9–3.1.)–ல் எல்லா விசைகளும் அவை செயற்படும் திசைகளும் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கின்றன. O பொருள் புள்ளி யாகக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.



படம் 9-3.1.

R—செங்கோட்டு எதிர்விசை

P—வெளிவிசை (செயற்படுவது)

W—பொருளின் எடை

சாய்தளச் சாய்வு—α

P என்ற விசை செயற்படும் போது ஒன்று அல்லது மற்றொன்று என இரு நிகழ்ச்சிகள் நேர இடமுண்டு.

(1) O என்ற பொருள் கீழே இறங்கவிருக்கும் அசைவற்ற நிலை யெல்லை; அல்லது

(2) O என்ற பொருள் மேலே ஏறவிருக்கும் அசைவற்ற நிலை யெல்லை.

முதலில் கீழே இறங்கவிருக்கும் அசைவற்ற நிலை யெல்லை எனக் கொள்வோம். அப்போது μR என்ற உராய்வு எல்லை விசை OC என்ற திசையில் செயற்படும். இப்போது எல்லா விசைகளையும் OC, OB என்ற செங்குத் தச்சுக்களை யொட்டிப் பிரித்து, மரபுப்படி $X = 0$, $Y = 0$ என்ற சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

OC–ன் திசையில் : $X = P\cos\theta + \mu R - W\sin\alpha =$ (01)

OB–ன் திசையில் : $Y = P\sin\theta + R - W\cos\alpha = 0$ (2)

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$P = \frac{W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$ எனப் பெறப்படும்.

$\mu = \tan\lambda$ என்ற உராய்வுக் கோணத் தொடர்பை நாம் ஈடு செய்தால்,

$$P = \frac{W(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda)}{\cos\theta\ \cos\lambda - \sin\theta\sin\lambda}$$

$$= \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos(\theta + \lambda)}$$ என்ற முடிவு வரும் ... (3)

எனவே, P என்ற விசை செயற்படுவதால், அப்பொருள் கீழே இறங்கும் தருவாயில் உள்ளது; கீழே இறங்குவதைத் தடுத்து அசைவற்ற நிலையெல்லையில் P-ம் மற்ற விசைகளும் உள்ளன வெனப் பெறுகிறோம். இரண்டாவதாக, மேலே ஏறவிருக்கும் அசைவற்றநிலையெனக் கொள்வோம். அப்போது μR என்ற உராய்வு எல்லை விசை OA என்ற திசையில் செயற்படும்.

முன்மாதிரியே, $X = 0$, $Y = 0$ என்ற அசைவற்ற நிலைக்குரிய சமன்பாடுகளை எழுதுவோம்.

OC–ன் திசையில் : $X = P\cos\theta - \mu R - W\sin\alpha = 0$ (4)

OB—ன் திசையில் : $Y = P\sin\theta + R - W\cos\alpha = 0$ (5)

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$P = \frac{W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$ எனப்பெறப்படும்

$\mu = \tan\lambda$ என்ற உராய்வுக் கோணத் தொடர்பை நாம் ஈடு செய்தால்,

$$P = \frac{W(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)}{\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda}$$

$$= \frac{W\sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$ என்ற முடிவு வரும் ... (6)

எனவே, P என்ற விசை செயற்படுவதால், அப் பொருள் மேலே ஏறும் தருவாயில் உள்ளது; மேலே ஏறுவதைத் தடுத்து அசைவற்றநிலை எல்லையில் P–ம் மற்ற விசைகளும் உள்ளனவெனப் பெறுகிறோம்.

(3) –ல் பெறப்படும் P –ன் மதிப்பும்,

(6) –ல் பெறப்படும் P –ன் மதிப்பும்,

வெவ்வேறு எனக் காண்க.

எனவே, $\dfrac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$ – க்கும், $\dfrac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$ – க்கும்

இடைப்பட்ட எந்த விசை செயற்பட்டாலும், அப் பொருள் அச் சாய்தளத்தின் மேல் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

குறிப்பு (1) :

(6)–லிருந்து மற்றொரு முடிவுக்கும் நாம் வரலாம். அதாவது மீச்சிறு விசையைக் கொண்டு அப்பொருளை நாம் மேலே இழுக்க வேண்டுமானால் $\theta=\lambda$ என்ற வகையில் நாம் செயற்படுத்தும் P என்ற விசை சாய்தளத்திற்கு உராய்வுக் கோண அளவு சாய்ந்திருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு (2) : மேலே பெறப்பட்ட (3), (6) என்ற சமன்பாடுகளில் $\theta=0$ என ஈடு செய்தால், முதலில்

$$P=\frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda} \text{ எனவும், பின்னர்}$$

$$P=\frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \text{ எனவும் வரும்.}$$

$\theta=0$ என்பதின் பொருள் யாதெனில், P என்ற விசை சாய்தளத்திற்கு இணையாக ஒரு கோட்டில் செயற்படுகிறதென்பதாம். எனவே, அப் பொருளை அசைவற்ற நிலையில் சாய்தளத்தில் வைத்திருக்க, சாய்தளத்திற்கு இணையான கோட்டில் நாம் P என்ற விசையைச் செயற்படுத்தினால், P–ன் மதிப்பு

$$\frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda} \text{ –க்கும் } \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \text{ –க்கும்}$$

இடைப்பட்டிருக்கும்.

9.4. **எடுத்துக்காட்டு 1 :**

30 கிலோ கிராம் பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு சொரசொரப்பான கிடைத்தளத்திலுள்ளது. அதை நகரச் செய்யும் நிலைக்குக் கொண்டுவர 10. கி. கிராம் எடை தேவையெனில், உராய்வுக் கெழு என்ன? (கூட்டு) விளைவு எதிர் விசை யென்ன ?

செங் கோட்டு எதிர்வினை (விசை) = 30 கி.கி. எடை

உராய்வு எல்லை விசை 10 கி. கி.

உராய்வுக் கெழு$= \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

(கூட்டு) விளைவு எதிர் விசை $= \sqrt{30^2 + 10^2}$

$= 10\sqrt{10}$ கி. கிராம்.

அது செங்கோட்டுக்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம்

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

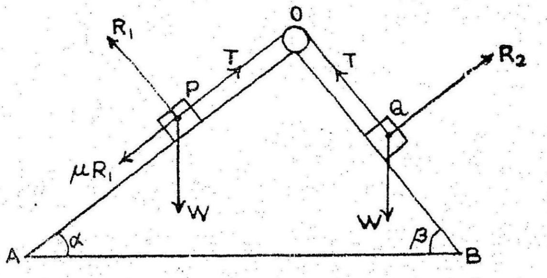
எடுத்துக்காட்டு 2:

இரு சாய்தளங்கள் பொது உச்சி முனை பெற்றவாறு வைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. உச்சியில் பொருத்தப்பட்ட ஒரு வழவழப்பான கப்பி (pulley) (இராட்டை)யின் மேல் செல்லும் ஒரு மெல்லிய கயிற்றின் முனையில் இரு சம எடைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு சாய்தளம் (சாய்வு–α) சொர சொரப்பானது; மற்றொன்று (சாய்வு—β) வழவழப்பானது;. வழவழப்பான தளத்தின் மேலுள்ள எடை கீழே நகரும் தருவாயில் உள்ளது. அவ்விரண்டு சாய்தளங்களின் சாய்வுகளிடைப்பட்ட தொடர்பு $\sin\beta = \sin\alpha + \mu\cos\alpha$ என நிறுவுக. [படம் –4.(2). காண்க.]

[படம் 9–4. (2).]–ல் O என்பது கப்பி. OA–சொரசொரப்பான சாய்தளம்; $\angle OAB = \alpha$; OB வழவழப்பான சாய் தளம்; $\angle OBA = \beta$

P;Q சமமான எடைகள் W,W; P–ன் செங்கோட்டு எதிர் வினை R_1; Q–ன் செங்கோட்டு எதிர்வினை R_2.

Q கீழே இறங்கும் சமயம்; எனவே P மேலே ஏறும் சமயம். எனவே P–ல் உராய்வு எல்லை விசை μR_1 கீழே செயற்படும். OB வழவழப்பான தளமாகையால், உராய் வெல்லை விசை ஏதுமில்லை.



படம் 9-4.(2).

கயிறு PQ இருப்பதாலும், அது ஒரே கயிருக O என்ற வழ வழப்பான கப்பியின் மேல் நகரக் கூடுமாதலாலும், P–ல் இழு விசை PO என்ற திசையிலும், Q–ல் இழு விசை QO என்ற திசையிலும் செயற்படும்.

தனித்தனியாக, P, Q என்ற இரு பொருள்களின் அசைவற்ற நிலைக்குத் தேவையான பொதுக் கட்டுபாடுகள் $X = 0$, $Y = 0$ என்பவற்றினை வசதியான முறையில் பயன் படுத்துவோம்.

P–ன் **அசைவற்ற நிலை**

சாய்தளம் X அச்சு; R_1 செயற்படும் கோடு Y அச்சு எனக் கொள்க.

$$X \equiv \mu R_1 + W \sin \alpha - T = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$Y \equiv W \cos \alpha - R_1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \; R_1 = W \cos \alpha \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \; T = W \sin \alpha + \mu R_1$$

$$= W \sin \alpha + \mu W \cos \alpha. \quad \ldots \quad (4)$$

Q-ன் அசைவற்ற நிலை

சாய்தளம் X அச்சு; R_2 செயற்படும் கோடு Y அச்சு.

$$X \equiv W \sin \beta - T = 0 \qquad \ldots \qquad (5)$$

$$Y \equiv W \cos \beta - R_2 = 0 \qquad \ldots \qquad (6)$$

$$\therefore T = W \sin \beta \qquad \ldots \qquad (7)$$

(4)-ம் (7)-ம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க,

$\sin \beta = \sin \alpha \; \mu \cos \alpha$ என்ற தொடர்பு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு: 3:

சென்ற கணக்கில் இரண்டாவது சாய்தளமும் சொர சொரப்பானதெனக் கொள்க; இரு தளங்களும் சம உராய்வுக் கெழு பெற்றவையாய், $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ என இருப்பின், உராய்வுக் கெழு $(2-\sqrt{3})$ என நிறுவுக.

Q-தான் மிகச் சாய்வான தளத்தின் மேலிருப்பதால், அது கீழே நகரும் தருவாயிலுள்ளதெனக் கொள்ளலாம்.

சென்ற கணக்கில் சமன்பாடு (5) மட்டும் மாறும். புதிதாக μR_2 என்ற உராய்வெல்லை விசை QO வழியாகச் செயற்படும் அதாவது

$T + \mu R_2 - W \sin \beta = 0$ எனவரும். எனவே (6) ஐப் பயன் படுத்தி,

$T = W \sin \beta - \mu W \cos \beta$ எனப் பெறலாம்.

$\therefore$ (4)-ம் (7)-ம் பார்த்தால்

$\sin \alpha + \mu \cos \alpha = \sin \beta - \mu \cos \beta$ என்ற தொடர்பு பெறலாம்.

இங்கு $W = 30°$, $\beta = 60°$ என ஈடுசெய்ய

$$\mu = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

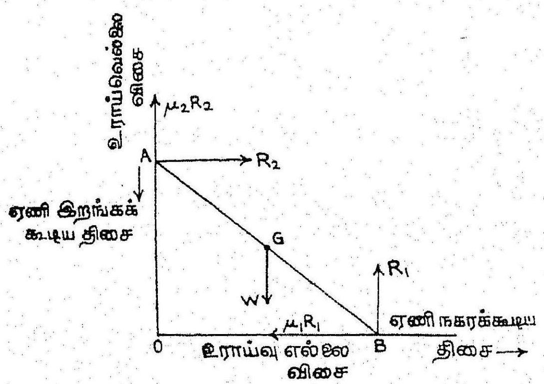
$= 2-\sqrt{3}$ எனப் பெறப்படும்.

9–5. **ஏணிக் கணக்குகள் :** ஏணிகள் தரையின்மேல் நிறுத்தப்பட்டு ஒரு சுவரின் மேல் சாய்த்து வைக்கப்பட்டிருப் பதை நாம் சாதாரணமாகப் பார்க்கும் ஒரு காட்சியாகும். தரை யும் சுவரும் முற்றிலும் வழ வழப்பாக இருக்குமாயின், ஏணியை அவ்வாறு நிறுத்தமுடியாது. தரை வழ வழப்பாகவும், சுவர் சொர சொரப்பாகவும் இருந்தாலும், மாறி இருந்தாலும் அல்லது இரண்டுமே சொர சொரப்பாகவிருந்தாலும், ஏணியை அவ்வாறு சுவரின் மேல் சாய்த்து நிறுத்தலாம். தரையும் சுவரும் மிக மிக சொர சொரப்பாக இருந்தால், ஏணியை மிக உயரத்தில் சுவரின்மேல் சாய்த்து நிறுத்தலாம். தரையும் சுவரில் முழுக்க முழுக்க வழ வழப்பாயிருப்பின், ஏணி நகர்ந்து வந்து கீழே கிடைத்தளத்தில் விழுந்துவிடும். ஆனால், தரையில் தங்கும் ஏணிக் கால்களை ஒரு பலமான கயிற்றினால் சுவரில் கட்டி விட்டால், ஏணியைச் சுவரில் சாய்த்து வைக்கலாம். விழாது. [8–7., எ. கா. (9) காண்க.]

பின் வரும் கணக்குகளில் ஏணி எனக் கூறுமிடமெல்லாம் வேறு யாதொன்றும் கூறப்படாவிடத்து, அதன் வடிவ மையத்தி லேயே புவியீர்ப்பு மையமும் உள்ளது எனக் கொள்க; அதாவது ஒரு சீரான (uniform) ஏணி எனக்கொள்க. அவ் வேணியின் வடிவ மையத்தில் அதாவது நீளத்தின் நடுப்பகுதியில், அதன் எடை கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படும்.

தரையில் நிறுத்தப்பட்டு, சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டி ருக்கும் ஏணியை எடுத்துக்கொண்டால், அவ் வேணி தரையில் தொடுமிடத்தும், சுவரில் தொடுமிடத்தும், முறையே தரைக்குச் செங்குத்தாகவும், சுவருக்குச் செங்குத்தாகவும் எதிர்வினைகள் (விசைகள்) செயற்படும். இப்படிச் சாய்த்து வைக்கப்பட்டிருக் கும் ஏணி நழுவ ஆரம்பிக்கும்போது, தரையிலிருக்கும் கால்கள் சுவர் இருக்கும் புறத்திற்கு எதிர்ப்புறத்தில் முதலில் நகரும்;

பின்னர், அதன் காரணமாகச் சுவரிலிருக்கும் பக்கம் கீழேயிறங்க ஆரம்பிக்கும். தரை சொர சொரப்பாயிருப்பின், ஏணி நகரும் தருவாயில் உராய்வு எல்லை விசை, சுவர்ப்பக்கமும், சுவர் சொர சொரப்பாயிருப்பின், உராய்வு எல்லை விசை மேற்புறமும் செயல் படுவதை, பின்வரும் படம் மூலமாகக் காணலாம். [படம் 9-5.(i) காண்க.]



படம் 9-5. (i)

OA சுவர்; *OB* கிடைத்தரை; *O* என்பது சுவரும் தரையும் சந்திக்குமிடம்.

AB ஏணி; சீரேணியெனக் கொண்டால், ஏணியின் நீளத்தின் மையப்புள்ளியான *G* புவியீர்ப்பு மையமாகும்; அங்கு ஏணியின் எடை *W*, கீழே செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

B ஏணி தரையைத் தொட்டு நிற்குமிடம்; அங்கு ஏணி தரையை யழுத்த தரையின் எதிர்வினை (விசை) R^1 என்பது *B O*–க்குச் செங்குத்தான திசையில் செயற்படும். *A* ஏணி சுவரைத் தொடுமிடம்; அங்கு ஏணி சுவரை யழுத்த, சுவரின் எதிர்வினை (விசை) R_2 = என்பது *OA*–க்குச் செங்குத்தான திசையில் செயற்படும். ஏணி தானாக நகர, ஏணியின் முனை *B* ஆனது, *O* இருக்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில், அதாவது *OB* –ன் நீட்டல் திசையில் நகரும். அப்போது *A* என்ற முனை கீழே இறங்கி *O* பக்கம் வரும்.

(i) ஏணியானது அசைவற்றநிலை எல்லையில் இல்லாது சாதாரணமாக நிற்தா ானல், தரையின் உராய்வு விசை F^1,

நகரக் கூடிய பக்கத்திற்கு எதிர்திசையில் அதாவது BO பக்கம் செயற்படும் ($F_1 < \mu_1 R_1$) என்பது இங்குக் கவனத்திலிருக்க வேண்டும்; μ_1 என்பது தரைக்கும் ஏணிக்குமுள்ள உராய்வுக் கெழு.)

சுவரின் உராய்வு விசை F_2, ஏணி இறங்கக் கூடிய கீழ்ப் பக்கத்திற்கு எதிர்த் திசையில் அதாவது OA -ன் நீட்டல் பக்கம் செயற்படும். ($F_2 < \mu_2 R_2$ இங்குக் கவனத்திலிருக்கவேண்டும். μ_2 என்பது சுவருக்கும் ஏணிக்குமுள்ள உராய்வுக்கெழு)

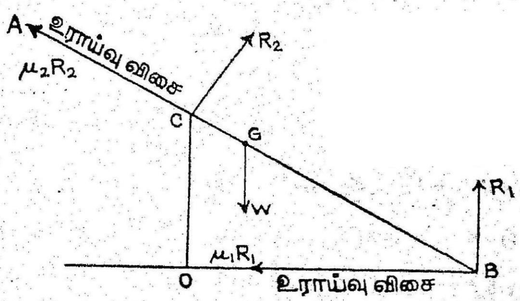
இது **அசைவற்ற நிலையெல்லை அல்லாத** ஒரு நிலைக்குப் பொருந்தும்.

(ii) மாறாக, ஏணியானது **அசைவற்ற நிலையெல்லையில்** இருக்குமானால்,

B -ல் $\mu_1 R_1$ என்ற உராய்வெல்லை விசையும், A -ல் $\mu_2 R_2$ என்ற உராய்வெல்லை விசையும் முறையே BO பக்கமும், OA -ன் நீட்டல் பக்கமும் செயற்படும். படத்தில் காட்டப் பட்டிருப்பது காண்க.

மேற்கூறிய விளக்கம் யாவும் ஓர் ஏணியின் ஒரு முனை கிடைத்தரையிலும், மற்றொருமுனை குத்துச் சுவரிலும் பொருந்தியிருக்கும் அசைவற்ற நிலைக்கு மட்டுமே பொருந்தும்.

அல்லாமல், ஏணியின் ஒரு முனை கிடைத்தரையில் நின்று, மற்றொரு முனை ஒரு சுவருக்கு அப்பால் வெளியே நீட்டிக் கொண்டு அசைவற்ற நிலையெல்லையில் நிற்குமானால், விசைகள்



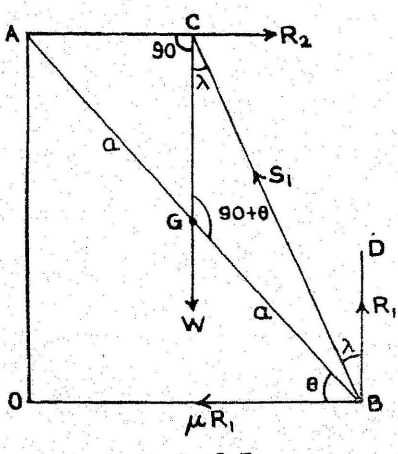
படம் 9-5. (ii)

எதிர்விசைகள் செயற்படும் திசைகள் [படம் 9-5 (ii)]-ல் காட்டப்பட்டிருப்பது காண்க.

இந்த விளக்கங்களோடு பின்வரும் ஏணிக்கணக்குகள் சில வற்றைச் செய்து பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு சீரேணியின் ஒரு முனை சொர சொரப்பான தரை மீதும் (உராய்வுக்கெழு μ), மற்றொரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவர்மீது சாய்ந்தும் அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் நிற்கிறது. அது கிடைக்கோட்டிற்குச்சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)$ என நிறுவுக.

ஏணி AB –ன் நீளமையம் G–ல் W என்ற எடை செயற் படுகிறது. முன்னர் விளக்கியபடி, R_1, R_2 எதிர்வினை (விசைகள்). A–ல் உராய்வு விசை யேதுமில்லை. [படம் 9-5. காண்க.]



படம் 9-5.

B –ல் உராய்வெல்லை விசை μR_1 செயற்படுகிறது. திசை BO, R_1–க்கும் μR_1–க்கும் சேர்ந்த (கூட்டு) விளைவு விசை S_1 என படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, 9–2.5–ல் நிறுவிய படி, R_1–க்கும் S_1–க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் λ $\{= \tan^{-1} \mu)\}$.

$\angle ABO = \theta$ எனக் கொள்க; $\tan \theta = \frac{1}{2\mu}$ என நிறுவ வேண்டும். R_1–க்கும் $\mu_1 R_1$–க்கும் சேர்ந்து S_1 ஈடு செய்வதால் ஏணியின்மேல் செயற்படும் விசைகள் படத்தில் உள்ளபடி,

A–ல் R_2

G–ல் W

B–ல் S_1

இம் மூன்று விசைகளும் ஒருங்கே செயற்பட்டு ஏணி அசைவற்ற நிலையிலிருப்பதால், மூன்று விசைத் தேற்றப்படி, அம் மூன்று விசைகளும் (i) இணைகோடுகளில் செயற்பட வேண்டும் அல்லது (ii) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

W-ம், R_2-ம் C-ல் சந்தித்தால் S_1 என்பது C வழியாகச் செல்லல் வேண்டும், அதாவது S_1 என்பது BC-ல் செயற்பட வேண்டும். எனவே, $\angle CBD = \lambda$.

$\triangle ACB$ ஐ எடுத்துக் கொள்க

$$AG = a = GB$$

$$\angle BCG = \angle CBD = \lambda$$

$$\angle AGC = 90 - \theta$$

$$\therefore \quad \angle CGB = 90 + \theta$$

$$\angle ACG = 90°$$

இவை யாவற்றையும், கோண கணிதத் தொடர்பான 3·5-ல் கண்ட சமன்பாட்டில் ஈடு செய்தால் $(a + a) \cot (90 + \theta) = a \cot 90 - a \cot \lambda$ எனப் பெறலாம்.

$$-2 \tan \theta = -\cot \lambda$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{1}{2 \tan \lambda}$$

$$= \frac{1}{2 \mu}$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2 \mu}\right)$$ என நிறுவப்படுகிறது.

மாற்று முறை : R_1 ஐயும் μR_1 ஐயும் கூட்டாமல் (கூட்டு விளைவு விசை காணாமல்) தனித் தனியே வைத்துக் கொண்டு, ஏணியின் மேல் செயற்படும் விசைகள் நான்கும், அதாவது, $R_1, R_2, W, \mu R_1$ எடுத்துக் கொண்டு, பகுதி 8-3-ல் கண்ட தேற்றம் 2 ஐ இங்குப் பயன்படுத்தலாம்.

OB ஐ x அச்சாகவும், OA ஐ y அச்சாகவும் கொண்டு

$X = 0$, எனவும்

$Y = 0$, எனவும்

ஏதாவதொரு புள்ளியை யொட்டி, எல்லா விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் எனவும் கொண்டு கூட்ட, இக் கணக்கினைச் செய்யலாம்.

$$X \equiv R_2 - \mu R_1 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$Y \equiv R_1 - W = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

B ஐ ஒட்டிய திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை

$$W a \cos \theta - R_2 \, 2a \sin \theta = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகள் வரும்.

(1), (2) இரண்டும் கொண்டு

$R_2 = \mu R_1 = \mu W$ எனக் கொண்டு இதை (3)-ல் ஈடு செய்தால்.

$$W a \cos \theta - \mu W 2a \sin \theta = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

அதாவது $\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dfrac{1}{2\mu}$

அல்லது $\tan \theta = \dfrac{1}{2\mu}$ என நாம் நிறுவ வேண்டியதைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒரு சீரேணி நிலத்தின் மேல் ஒரு முனையும், சுவரின் மேல் ஒரு முனையுமாக நிற்கிறது. நிலம் சொர சொரப்பானது; உராய்வுக் கெழு 0.75; சுவர் வழவழப்பானது. நிலத்திற்கு ஏணி 45° சாய்விலிருந்தால், ஏணியின் எடையுடைய ஒரு மனிதன், ஏணி சறுக்கிவிடாமல் ஏதோ ஏணியின் உச்சிவரை சமாளித்துக் கொண்டு ஏற முடியும் என நிறுவுக. (அதாவது மனிதன் உச்சியில் இருக்கும் சமயம் சறுக்கல் ஆரம்பிக்கும் என்பது பொருள்.)

மனிதன் ஏணியின் உச்சியில் இருக்கும்போது மனிதன் எடை W, A-லிருந்து செங்குத்தாகக் கீழே செயல்படுகிறது. சுவர் வழவழப்பானதால் அங்குச் செங்கோட்டு எதிர்வினை

(விசை) R_2 மட்டுமே செயற்படும்; உராய்வு விசை யில்லை. (படம் 9-5 2 காண்க.)

மனிதன் உச்சிவரை ஏற முடியும் என வைத்துக் கொண்டு, அதுவரை B என்ற முனை சறுக்காது எனவும் கொண்டு, உச்சியில் மனிதன் இருக்கும்போது, B-ல் உராய்வு விசை $F (< \mu R_1)$ எனக் கொண்டு, அந்த நிலையில்தான் $F = \mu R_1$ ஆகுமென நிறுவினால் போதும்.

அசைவற்ற நிலைக்குரிய மரபான சமன்பாடுகள்

$X = 0$, $Y = 0$. ஏதாவதொரு புள்ளியை யொட்டிய திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத் தொகை $= 0$ காண்போம்.

OB — x அச்சு

OA — y அச்சு

ஏணியின் நீளம் $2a$ எனக் கொள்க; $AG = a = GB$

$$X \equiv R_2 - F = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$Y \equiv R_1 - 2W = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

Aஐ யொட்டி, திருப்புத்திறன்களின் இயற் கூட்டுத்தொகை

$$-Wa \cos 45^\circ + R_1\, 2a \cos 45^\circ - F\, 2a \sin 45^\circ = 0 \qquad (3)$$

(2)-லிருந்து R_1-க்கு ஈடு செய்ய

$$\frac{W}{\sqrt{2}} + \frac{2F}{\sqrt{2}} = 2.\frac{2W}{\sqrt{2}}$$ என வரும்.

அதாவது $$\frac{2F}{\sqrt{2}} = \frac{3W}{\sqrt{2}}$$

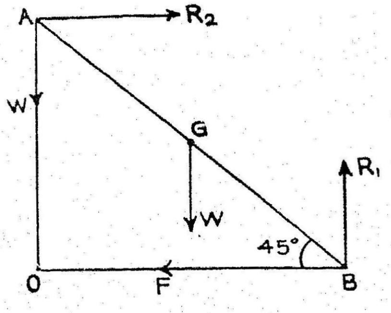
அல்லது $$F = \frac{3W}{2}$$ என வரும்.

$R_1 = 2W$ ஆகையால், $F = \frac{3}{4} R_1$ என வரும்.

தரையில் உராய்வுக் கெழு 0.75 ஆகையால், மனிதன் உச்சியில் இருக்கும் போது,

B–ல் செயற்படும் உராய்வு விசை $= \frac{3}{4} R_1$

$$= 0.75\ R_1$$



படம் 9-5.2.

எனப் பெறப்படுகிற தாகையால், மனிதன் ஏணி உச்சியிலிருக்கும் போது உராய்வு எல்லை விசை B-ல் செயற்படுகிறது; எனவே, அப்போது அசைவற்ற நிலை எல்லை எனத் தெரிகிறது.

மாற்று முறையாக : மனிதன் ஏணியின் மேல் B-விருந்து தூரத்தில் இருப்பதாகக் கொண்டு அப்போது B-ல் உராய்வு விசை F எனக் கொண்டு, ஏணி சறுக்குமா அல்லவா எனப் பார்த்து, எவ்வளவு தூரம் ஆபத்தில்லாமல் ஏறலாமெனப் பார்ப்போம்.

$$F < \mu R_1, \text{ அதாவது } F < .75\ R_1$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) அப்படியே வைத்துக் கொள்ளலாம். மனிதன் l தூரம் ஏணியில் ஏறியிருக்கும்போது, A புள்ளியையொட்டி திருப்புத்திறன் சமன்பாடு,

$$-W(2a - l)\cos 45 - W.a\cos 45 - F.2a\sin 45$$

$$+ R_1\, 2a\cos 45 = 0 \qquad \ldots \qquad (4)$$

இதில் $R_1 = 2W$ என ஈடு செய்தால்,

$$F.\frac{2a}{\sqrt{2}} = \frac{2W.2a}{\sqrt{2}} - \frac{Wa}{\sqrt{2}} - \frac{W(2a-l)}{\sqrt{2}}$$

கிடைக்கும். அதாவது $2\,Fa = Wa + Wl$

$$\text{அதாவது}\quad F = \frac{W(a+l)}{2a}$$

$R_1 = 2W$ ஆகையால்

அமைதி நிலைக்கு $F < 2W\mu$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $\dfrac{W(a+l)}{2a} < 2W \times \frac{3}{4}$ ஆக இருத்தல்வேண்டும்.

அதாவது $\dfrac{a+l}{2a} < \frac{3}{2}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் ... (5)

$$\frac{a+l}{2a} = \frac{3}{2} \qquad \ldots \qquad (6)$$

என்பது அசைவற்ற நிலை எல்லையாகும்.

(5)-ன்படி $2a + 2l < 6a$

அதாவது $2l < 4a$

அதாவது $l < 2a$ இருக்க வேண்டும்.

மனிதன் ஏணியில் எந்த இடத்திலிருந்தாலும் $l < 2a$ ஆகையால், அவன் ஏணியில் எங்கிருந்தாலும் ஏணி சறுக்காது.

(6)-ன்படி $l = 2a$ என்பது அசைவற்ற நிலை யெல்லைக்குரிய கட்டுப்பாடாதலின், அவன் ஏணி உச்சியிலிருக்கும் போது, அசைவற்ற நிலை யெல்லையாகும்.

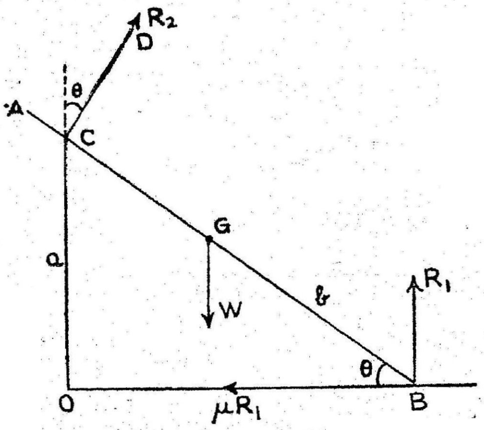
எடுத்துக்காட்டு 3 : l நீளமான ஒரு சீரேணியின் கீழ்முனை ஒரு சொர சொரப்பான தரை மேலும், மற்ரொரு முனை தரைக்கு a உயரத்திலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிடைத் தண்ட வாளத்தின் மேல் சாய்ந்து சிறிது வெளியே நீட்டிக் கொண்டு மிருக்கிறது. அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் அது அப்போது இருக்குமானல், நிலத்திற்கும் ஏணிக்குமுள்ள உராய்வுக்கெழு

$$\frac{a\sqrt{l^2 - a^2}}{(l^2 + a^2)}$$ என நிறுவுக.

(படம் 9-5.3)-ல் A என்ற முனை சற்று வெளியே நீட்டிக் கொண்டு AB என்ற ஏணி தரையில் மற்ரொரு முனையோடு நிற்கிறது.

முனை A சற்று வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருப்பதால், ஏணியில் C என்ற புள்ளி வழவழப்பான தண்டவாளத்தின்மேல் இருக்கிறது. எனவே, C-ல் செயற்படும் எதிர்வினை (விசை)

BC-க்குச் செங்குத்தாக *CD* என்ற கோட்டில் செயற்படுகிறது. மற்ற விசைகள் படத்தில் காட்டியபடி செயல்படுகின்றன. விளக்கம் தேவையில்லை.



படம் 9-5.3.

OB — x அச்சு

OA — y அச்சு எனக் கொண்டு அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகளை எழுதினால், அவை

$$X \equiv R_2 \sin \theta - \mu R_1 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$Y \equiv R_2 \cos \theta + R_1 - W = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

(குறிப்பு : R_2 என்ற விசை OA, OB என்ற திசைகளில் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.)

ஏணி சற்றுதான் தண்டவாளத்திற்கு வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கிறதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால்,

BC = தோராயமாக l எனக் கொள்ளலாம்.

அதையொட்டி $CG = \frac{l}{2} = GB$ எனவும்

$\sin \theta = \frac{a}{l}$ எனவும்

$\cos \theta = \frac{\sqrt{l_2 - a_2}}{l}$ எனவும் கொள்ளலாம்.

Bஐ ஒட்டி திருப்புத்திறன் சமன்பாடு எழுதினால்,

$$W\frac{l}{2}\cos\theta - R_2\, l = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

எனப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad R_2 = \frac{W\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{W\sqrt{l^2 - a^2}}{2\,l} \quad \cdots \quad (5)$$

(2)-லிருந்து $R_1 = W\, R_2 \cos\theta$

$$= W - \frac{W\,(l^2 - a^2)}{2\,l^2}$$

$$= W\frac{(l^2 + a^2)}{2\,l^2} \quad \cdots \quad (6)$$

(1)-லிருந்து $\mu = \dfrac{R_2 \sin\theta}{R_1}$

$$= \frac{W\sqrt{l^2-a^2}}{2\,l} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{2\,l^2}{W\,(l^2+a^2)}$$

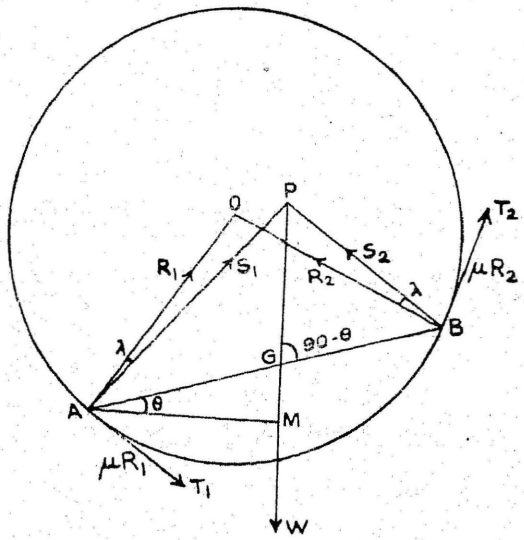
$$= \frac{a\sqrt{l^2-a^2}}{l^2+a^2}$$ எனக் கிடைக்கும்.

ஏணியை விட்டு, மற்ற பலவித எடுத்துக்காட்டுகள் பின்னர் செய்து காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு கனமான கழி ஒரு குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வட்டத்தில் ஒரு செங்கோணம் தாங்கி அசைவற்ற நிலையில் இருக்கிறது. அது அசைவற்ற நிலை எல்லையில் இருக்குமாயின் அக்கழி கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் உராய்வுக் கோணத்தைப் போல் இருமடங்கு என நிறுவுக.

(படம் 9-5.4.)-ல் AB என்பது அக்கழி.

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ (கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது)}$$



படம் 9-5.4.

A, B இரண்டு இடங்களிலும் AO, BO என்ற திசைகளில் செங்கோட்டு எதிர்வினை (விசை)கள் செயற்படும்; ஏனெனில், வட்டத்தில் எப்புள்ளியிலும் தொடுவரைக்குச் செங்கோடு அப் புள்ளி வழியாக உள்ள வட்ட ஆரமாகும். அசைவற்ற நிலை எல்லையில் B கீழே இறங்கவும், A மேலே ஏறவும் ஆரம்பிக்கும் தருணம். எதிர்த்திசைகளான BT_2 பக்கமும், AT_1 பக்கமும் உராய்வு எல்லை விசைகள் μR_2, μR_1 செயற்படும்.

R_2, μR_2 என்ற இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு எதிர் விசை S_2 என்பது BP என்ற திசையில் செயற்படும்; $\angle OBP = \lambda$ = உராய்வுக் கோணமாகவிருக்கும். அவ்வாறே,

R_1, μR_1 என்ற இரு விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு எதிர்விசை S_1 என்பது AP என்ற திசையில் செயற்படும்; $\angle OAP = \lambda$ = உராய்வுக் கோணமாகவிருக்கும்.

AP-ம், BP-ம் P-ல் சந்திக்கட்டும். அக் கழியின்மேல் செயற் படும் விசைகள் AP-ன் மேல் S_1-ம்; BP-ன் மேல் S_2-ம்; அக்

கழியின் மையமான G வழியாக அக்கழியின் எடை W, குத்துக் கோட்டில் செயற்படுகின்றன.

எனவே, இம் மூன்று விசைகள் செயற்படுவதன் காரணமாக அக் கழி அசைவற்ற நிலையிலிருப்பதால், இம் மூன்றுவிசைகளும் இணைகோடுகளில் செயற்படவேண்டும். அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்; S_1-ம், S_2-ம் P-ல் சந்திப்பதால் PG என்பது கிடைக் கோட்டுக்கு குத்துக் கோடாக இருக்க வேண்டும்; PG வழியாக எடை W செயற்பட்டாக வேண்டும். A வழியாக AM என்பது கிடைக்கோடெனக் கொண்டு, $\angle GAM$ θ எனவும் கொள்வோம். அப்போது $\angle PGP = 90-\theta$ எனவும் கொள்வோம். அப்போது $\angle PGB = 90-\theta$ ஆகும். கழியின் நீளம் $2a$ எனக் கொண்டால்

$AG = a = GB$ எனவாகும்.

$\angle AOB = 90^\circ$ ஆகையால்,

$$\angle OAB = 45^\circ = \angle OBA$$

$$\angle PAB = 45^\circ - \lambda$$

$$\angle PBA = 45^\circ + \lambda$$

எனவே, $\triangle APB$-க்கு நாம் 3–5.-ல் கண்ட கோண கணிதத் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தினால்,

$$(a+a)\cot(90-\theta) = a\cot(45^\circ-\lambda) - a\cot(45^\circ+\lambda)$$

$$2\tan\theta = \frac{\cos(45^\circ-\lambda)}{\sin(45^\circ-\lambda)} - \frac{\cos(45^\circ+\lambda)}{\sin(45^\circ+\lambda)}$$

$$= \frac{\sin(45^\circ+\lambda - 45^\circ+\lambda)}{\sin(45^\circ-\lambda)\sin(45^\circ+\lambda)}$$

$$= \frac{\sin 2\lambda}{\dfrac{\cos 2\lambda - \cos 90^\circ}{2}}$$

$$= \frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda} \times 2$$

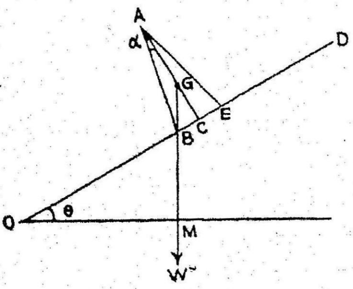
$$= 2\tan 2\lambda$$

$\therefore \theta = 2\lambda$ எனப் பெறப்படும்.

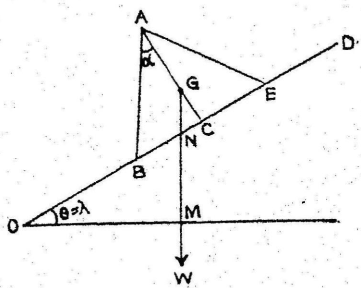
அதாவது கழி கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம்,

$$= 2 \times \text{உராய்வுக்கோணம்}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5: ஒரு சீரான கெட்டிக் கூம்பு (உச்சி அரைக்கோணம் α) ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சாய்தளத்தின் சாய்வு சிறிது சிறிதாக மிகுதியாக்கப்பட்டால், உராய்வுக்கெழுவின் மதிப்பு 4 tan α-க்கு குறைவாக இருந்தால் மட்டுமே, அக்கூம்பு தலைகீழாய்ச் சாய்வதற்கு முன் நகருமென நிறுவுக; மாறாக உராய்வுக் கெழுவின் மதிப்பு 4 tan α-க்கு மிகைப்படின், அக்கூம்பு நகர்வதற்கு முன்னரே தலைகீழாய்ச் சாய்ந்துவிடுமென நிறுவுக.



படம் 9-5.5.(i)



படம் 9-5.5. (ii)

[படம் 9-5.5. (i)]-ல் கூம்பு $ABCE$ சாய்தளம் OD-ன் மேல் நிற்கிறது.

$\angle BAC = \alpha$ (கூம்பின் உச்சி அரைக்கோணம்)

$\angle DOM = \theta$ (சாய்தளத்தின் சாய்வு)

கூம்பின் உயரம் $CA = h$ ஆனால், கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G இருக்குமிடம் $CG = \dfrac{h}{4}$ என்ற வகையில் உராய்வுக் கோணம் λ எனக் கொள்க.

நாம் 9-3. குறிப்பு (3)-ல் கண்டபடி, $\theta < \lambda$ ஆகவிருக்கும் வரையில் கூம்பு சாய்தளத்தின் மேல் நகராது. $\theta = \lambda$ ஆகும் போது, கூம்பு நகர ஆரம்பிக்கும்; அது அசைவற்ற நிலை

யெல்லையென நாம் அறிவோம். G வழியாகக் கூம்பின் எடை, கிடைக்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக செயற்படும்; செயற்படும் கோடு GM.

[படம் 9-5.5. (ii)]-ல் G வழியாக W செயற்படும் கோடு GN கூம்பின் அடித்தளமான BCE-க்கு உள்ளேயிருக்குமானால், கூம்பு தலைகீழாகச் சாயாது. இந்த நிலையில் $\theta = \lambda$ ஆகுமானால், கூம்பு தலைகுப்புற விழாமல், கூம்பு சாய்தளத்தின்மேல் நகர ஆரம்பிக்கும். எனவே, $NC < BC$ ஆக இருந்து $\theta = \lambda$ ஆகும், சமயம் கூம்பு தலைகுப்புற விழ ஆரம்பிக்குமுன், நகர ஆரம்பிக்கும் சூழ்நிலை உருவாகியிருக்கிறது. ...(A)

$\triangle GNC$ - ல் $\angle GNC = 90 - \lambda$

$$\therefore NC = GC \cot (90 - \lambda)$$
$$= GC \tan \lambda$$
$$= \frac{h}{4} \tan \lambda$$

$\triangle ABC$ - ல், $\angle BAC = \alpha$

$$\therefore BC = AC \tan \alpha$$
$$= h \tan \alpha$$

$\therefore$ (A) என்ற சூழ்நிலை உருவாகும்போது,

$\frac{h}{4} + \tan \lambda < h \tan \alpha$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும்.

அதாவது $\tan \lambda > 4 \tan \alpha$

அதாவது $\mu < 4 \tan \alpha$ என்ற கட்டுப்பாடு இருக்கும். மாறாக, $\theta < \lambda$ ஆகவிருக்கும்போது,

$NC > BC$ ஆனால், கூம்பு நகர்வதற்கு முன், தலைகுப்புற விழ ஆரம்பிக்கும் அல்லது விழுந்துவிடும். எனவே, நகர்வதற்கு முன் கூம்பு தலைகுப்புற விழும் சூழ்நிலை உருவாகும் தருணம்

$NC > BC$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும்.

அதாவது $\frac{h}{4} \tan \lambda > h \tan \alpha$ என்ற கட்டுப்பாடு நிலவும்.

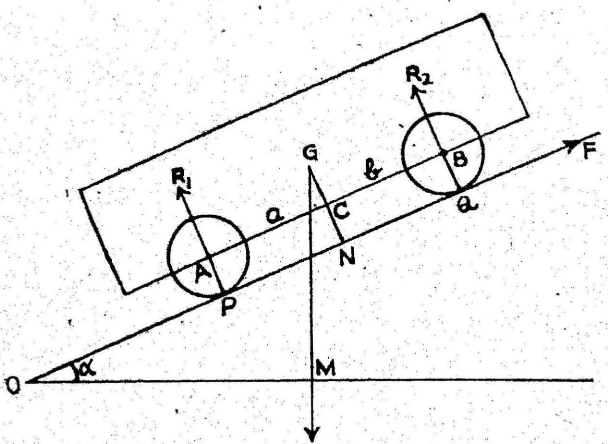
அதாவது $\tan \lambda > 4 \tan \alpha$;

அதாவது $\mu > 4 \tan \alpha$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் கூம்பு நகர்வதற்கு முன், தலைகுப்புற விழ ஏதுவாகும்.

சிறப்பு நிலை

$\theta = \lambda$ ஆக இருக்கும் சமயம், $NC = BC$ ஆனால், அதாவது G-லிருந்து வரும் குத்துக்கோடு, B வழியாகவே செல்லுமாயின், கூம்பு ஒருங்கே நகரவும், தலைகுப்புற விழவும் ஏதுவாகும். எனவே, $\mu = 4 \tan \alpha$ ஆகவிருப்பின், $\theta = \lambda$ ஆகும் சமயம், கூம்பு ஒருங்கே நகரவும், தலைகுப்புற விழவும் கூடிய சூழ்நிலை உருவாகும்.

எடுத்துக் காட்டு 6: ஓர் இரயில் பெட்டி, முன் சக்கரங்கள் பூட்டப்பட்டு ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் அசைவற்று நிற்கிறது. பெட்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் தண்டவாளத்திற்கு மேல் h உயரத்தில், முன் சக்கர அச்சிலிருந்து a தூரத்திலும், பின் சக்கர அச்சிலிருந்து b தூரத்திலும் தண்டவாளத்திற்கு இணைகோட்டிலிருக்கிறது. பெட்டிக்கும் தண்டவாளத்திற்குமுள்ள உராய்வுக் கெழு குறைந்தது $\dfrac{a+b}{h + b \cot \alpha}$ ஆக இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக. α என்பது சாய்தளத்திற்கும் கிடைத்தளத்திற்குமுள்ள சாய்வெனக் கொள்க.



படம் 9-5.6.

(படம் 9–5–6)-ல் இரயில் பெட்டி நிற்கும் படம் காண்க.

G – புவியீர்ப்பு மையம்;

A – முன் சக்கர அச்சு;

B – பின் சக்கர அச்சு;

R_1, R_2 என்ற எதிர்விணை (விசை)கள் PA, QB வழியாகச் செயற்படுகின்றன.

G வழியாக W என்ற எடை செயற்படுகிறது.
$AC = a$; $CB = b$ (கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது); $NG = h$.

வண்டி கீழேயிறங்கலாம்; அப்போது உராய்விசை F, படத்தில் காட்டியபடி மேலே செயற்படும்.

OPQ — x அச்சு எனவும்,

PA — y அச்சு எனவும் கொள்க.

அசைவற்ற நிலைக்குரிய சமன்பாடுகள்:

$$X \equiv F - W \sin \alpha = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$Y \equiv R_1 + R_2 - W \cos \alpha = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Gஐ யொட்டி திருப்புத்திறன் இயற்கூட்டு மதிப்பு கண்டு பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்குவோம்.

$$F h + R_2 b - R_1 a = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore (1),\ (2) \text{ - லிருந்து } \tan \alpha = \frac{F}{R_1 + R_2} \quad \ldots \quad (4)$$

$$\therefore R_1 + R_2 = F \cot \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(3)ஐ $R_1 a - R_2 b = Fh$ ... (6)
என எழுதுக.

(5), (6) இரண்டிலிருந்து

$$R_1 (a + b) = F (h + b \cot \alpha)$$

$$\therefore R_1 = F \frac{(h + b \cot \alpha)}{a + b}$$

$$\text{அல்லது } F = \frac{a + b}{h + b \cot \alpha} R_1$$

அசைவற்ற நிலைக்கு

$F \leq \mu R_1$ என இருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad \dfrac{a + b}{h + b \cot \alpha} \leq \mu$ என இருக்கவேண்டும்.

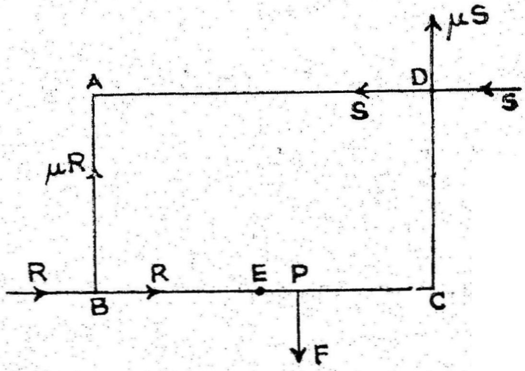
$\therefore \mu \geq \dfrac{a + b}{h + b \cot \alpha}$ என இருக்கவேண்டும்.

∴ உராய்வுக்கெழு, குறைந்த அளவு

$\dfrac{a + b}{h + b \cot \alpha}$ இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7: ஒரு மேசையிலுள்ள இழுப்பறையை இழுப்பறைக்கு இணையான திசையிலுள்ள ஒரு விசை கொண்டு இழுக்கவேண்டும். இழுப்பறை மையத்திற்கு எவ்வளவு தூரத்தில் பிடித்திழுத்தால், அவ்விழுப்பறை தனது பக்கங்களோடு இடித்து மோதிக்கொள்ளாமல் இருக்கலாம்?

இழுப்பறையின் படம் 9-5.7.-ல் காண்க. P என்ற புள்ளியில் F என்ற விசை செயற்பட்டு இழுப்பறையை இழுக்கிறது.



படம் 9-5.7.

$ABCD$ என்பது P வழியாக இழுப்பறையில் ஒரு வெட்டு முகம். $BC = 2a$ எனவும், E அதன் மையப்புள்ளி யெனவும் கொள்க.

$BE = a = EC$; P என்பது E–லிருந்து b அளவு தூரத்தி லுள்ள தெனக் கொள்க. இழுப்பறையை E–ல் பிடித்திழுக் காது, சிறிது தள்ளி P–ல் இழுத்தால், B என்ற முனை மேசைச் செருகல் பக்கத்தில் இடித்து மோதும்; அவ்வாறே D என்ற முனையும் இடித்து மோதும்.

B, D என்ற இழுப்பறை முனைகள் மேசைப் பக்கத்தை மோதுவதால், மேசையின் எதிர்வினை (விசை) இழுப்பறைமேல் படத்தில் காட்டியபடி R, S எனக் குறிப்பிட்ட திசைகளில் செயற்படும். இழுப்பறை வெளியே இழுக்கப்படுவதால், மீப் பெரு உராய்வு விசைகளான, μR, μS என்பவை படத்தில் காட்டியபடி எதிர்ப்புறங்களில் (உட்புறமாக) செயற்படும்.

இழுப்பறை இடித்து மோதாமல் இழுக்கபடவேண்டுமானால், $F \geq \mu R + \mu S$ என்ற கட்டுபாடு தேவை. இதுவே நாம் காண வேண்டிய விடை பெறுவதற்கு முதற்படியாகும்.

BC ஐ X அச்செனவும், BA ஐ y அச்செனவும் கொண்டால்

அசைவற்ற நிலைச் சமன்பாடுகள், $R = S$ ... (1)

அசைவற்ற நிலை யெல்லையில்,

$$F \geq \mu R + \mu S \qquad \ldots (2)$$

B ஐ ஒட்டித் திருப்புத்திறன்களின் இயற்கூட்டுத் தொகையை, பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தினால்

$$-F\,(a+b) + S.\ BA \times \mu S.\ 2a = 0 \ldots (3)$$

$$\therefore S = \frac{F\,(a+b)}{AB + 2a\mu} \qquad \ldots (4)$$

இழுப்பறை இடித்து மோதாமல் இழுக்கப்பட,

$F \geq \mu\,(R+S)$ என நாம் கட்டுப்பாடு கண்டோம். எனவே,

(1) என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்டு நாம் பெறும் கட்டுப்பாடு,

$$F \geq \mu . 2S$$

அதாவது $F \geq \dfrac{\mu\,2F\,(a+b)}{AB + 2a\mu}$

அதாவது $F(AB + 2a\mu) \geq 2\mu F(a+b)$

அதாவது $AB \geq 2\mu b$

அதாவது $b \leq \frac{AB}{2\mu}$

எனவே BC-ன் மையத்திலிருந்து $\frac{AB}{2\mu}$ -க்கு மேற்படாத தூரத்திலிருந்து இழுப்பறையை இழுத்தால், அது மேசையின் பக்கங்களில் மோதாமல், இடிக்காமல் இழுக்கப்படலாம்.

பயிற்சி 9

1. ஒரு கனமான துகள் ஒரு சொரசொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு, சாய்தளத்தின்மேல் மீப்பெரு சாய்வுடைய கோட்டில் அதன் எடைக்குச் சரியான அளவுள்ள ஒரு விசையால் ஈர்க்கப்பட்டு, மேலேறும் தருவாயிலுள்ளதானுல் உராய்வுக் கெழு $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$க்குச் சமமென நிறுவுக (சாய்தளச் சாய்வு α எனக் கொள்க).

2. ஒரு சொரசொரப்பான பொள்ளல் கோளத்தின் உள்ளே ஒரு கனமான துகள் உராய்வு காரணமாகக் கோளத்தின் அடிப்புள்ளி யிலிருந்து $a\,(1-\cos\lambda)$ உயரத்திற்குமேல் அமைதி நிலையில் இருக்க முடியாதென நிறுவுக. (λ—உராய்வுக் கோணம்)

3. குத்துத் தளத்தில் நிற்கும் ஒரு சொரசொரப்பான வட்ட வளையத்தினுள் ஒரு சீரான கழி, அசைவற்ற நிலை எல்லையிலுள்ளது. வட்ட ஆரம் a, கழிநீளம் $=2l$ ஆனுல் μ என்ற உராய்வுக் கெழுவுக்கு, அக்கழி கிடைக் கோட்டுக்கு $\tan^{-1}\left(\frac{a^2\mu}{a^2 - l^2 + \mu^2 l^2}\right)$ அளவு சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக.

4. முன்கணக்கில் அக்கழி வட்டமையத்தில் $120°$ அளவுள்ள கோணத்தைத் தாங்கி, அசைவற்றநிலை எல்லையில் கிடைக் கோட்டிற்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்கிறது. $\mu\sqrt{3} = \tan\alpha$ ஆனுல், $\tan\theta : \tan 2\alpha = 2 : \sqrt{3}$ என நிறுவுக.

5. முன் கண்ட 4-ம் கணக்கில், கழி வட்டமையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குமானுல் அசைவற்றநிலை எல்லையில்

கிடைக்கோட்டிற்கும் கழிக்கும் இடைப்பட்டகோணம், உராய்வுக் கோணத்தைப்போல் இருமடங்கென நிறுவுக.

6. a அளவு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டின் வரம்பிடும் விட்டம் கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு அவ் வரைவட்டம் குத்துத் தளத்தில் நிற்கிறது. அதே குத்துத் தளத்தில் l நீளமுள்ள ஒருகழி அரைவட்டத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு மற்றொரு முனை தரைமேல் இருக்கிறது. இரு இடங்களிலும், உராய்வுக்கோணம் λ. அக்கழி அசைவற்றநிலை எல்லையிலிருக்கும்போது, அக்கழி கிடைக்கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{a\sin 2\lambda}{l}}$ என நிறுவுக.

7. $2a$ நீளமும் W எடையுள்ள ஒரு சீரான பலகையின் மையம் ஒரு உருளையின்மேல் வைக்கப்பட்டு, பலகையும், உருளையின் அச்சும் ஒன்றுக்கொன்று குத்துக்கோடுகளில் அமைந்திருக்கின்றன. உருளையின் ஆரம் b; உராய்வுக்கோணம் λ. உருளை மேல் பலகை நகர்ந்து விடாதவண்ணம், பலகையின் ஒரு முனையில் ஓர் எடையைக் கட்டித் தொங்கவிட்டால், அவ் வெடை $\dfrac{b\lambda W}{a-b\lambda}$-க்கு மிகைப்படக் கூடாதென நிறுவுக.

8. ஒரு சொரசொரப்பான கோளம் (ஆரம் r) α அளவு சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின்மேல் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. கோளத்தின் மையம் c; ஆனால், கோளத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் வேறொரு புள்ளி G-ல் இருக்கிறது. CG என்ற கோடு $\sin^{-1}\left(\dfrac{r\sin\alpha}{CG}\right)$ அளவில் குத்துக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்துள்ளது. சாய்தளத்தின் சாய்வை மெதுவாக உயர்த்தினால், எப்படி அசைவற்ற நிலை பாதிக்கபடுமென விளக்குக. (ப.க)

9. ஒரு சொரசொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் (சாய்வு α) ஒரு பொருளை மேலே இழுக்கத் தேவைப்படும் விசை, அதைக் கீழே விழாமல் தடுக்கத் தேவைப்படும் விசையைப் போல் n மடங்கு இருப்பின்,

$$\tan\alpha = \mu\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

(உராய்வுக் கெழு $= \mu$)

10. ஒரு சொரசொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் ஒரு பொருளை இழுக்க வேண்டும். இழுக்கும் விசை சாய்தளத்திற்கு

பக்கம் 250: கணக்கு 11-ன் தொடர்ச்சி:

வரிசை எண்	கிடைத் தளத்திற்கு சாய்ந்து நிற்கும் கோணம்	தரைக்கும் ஏணிக்கும் உராய்வுக் கெழு	சுவருக்கும் ஏணிக்கும் உராய்வுக் கெழு	வேறு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள்	நிறுவப்படவேண்டிய முடிவு
1.	θ	μ	சுவர் வழ வழப்பு	—	$\theta = \cot^{-1}(2\mu)$
2.	θ	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$		$\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$
3.	45°	μ	μ'		சுவர் பக்கம் ஏணியைச் சற்று நகர்த்தக் கூடிய விசை $\frac{W}{2}\left(\frac{1+2\mu-\mu\mu'}{1-\mu'}\right)$
4.	θ	μ	μ'	ஏணியின் நீளம் $a+b$; புவியீர்ப்பு மையம் ஒரு முனையிலிருந்து a தூரத்தில் உள்ளது.	$\tan\theta = \frac{a-b\,\mu\,\mu_1}{\mu\,(a+b)}$
5.	θ	μ	μ'		$\tan\theta = \frac{1-\mu\mu_1}{2\mu}$
6.	θ	μ	μ		$\frac{1-\mu^2}{2\mu}$
7.	30°	μ	μ		$\mu = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
8.	θ	$\tan\lambda$	$\tan\lambda$	ஏணி மையத்திற்குக் கீழே ஏணியின் y மையம் Ka தூரத்திலிருக்கிறது.	$\tan\theta = \cot 2\lambda - K \operatorname{cosec} 2\lambda$

உராய்வுக் கோண அளவு சாய்ந்திருந்தால் மட்டுமே, அவ் விசை மீச்சிறு மதிப்புடையதென நிறுக.

ஏணிக் கணக்குகள்

11. ஓர் ஏணி, நீளம் $2a$, எடை W ஒரு முனை தரைமேலும் மற்றொரு முனை ஒரு செங்குத்தான சுவரின்மேலும் சாய்ந்திருக்கிறது. அந் நிலையில் அதன் எல்லை, அசைவற்ற நிலை எல்லையெனக் கொள்க. பின்வரும் விவரங்கள் (பக்கம் 251) ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய முடிவுகளை நிறுவுக. (ஒன்றும் கொடுக்கப்படாவிடத்து சீரான ஏணி எனக் கொள்க.)

12. ஒரு ஏணி நீளம் 10 மீட்டர்; சீரான ஏணி அல்ல; அது கிடைக்கோட்டுக்கு θ அளவு சாய்ந்து ஒரு வழவழப்பான சுவர் மேல் ஒரு முனையும், உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}$ பெற்ற கிடைத் தளத்தில் மற்றொரு முனையுமாக நிற்கிறது. தரையிலிருந்து ஏணியின் மேல் 4 மீட்டர் தூரத்தில் ஏணியின் பு. மையம் இருக்கிறது. ஏணியின் எடை 30 கி. கிராம்; 70 கி. கி. எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியின் உச்சிவரை அபாயமின்றி ஏற, θ-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $\tan^{-1}\left(\frac{41}{25}\right)$ ஆக இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக.

13. ஒரு சீரான ஏணியின் எடை ω; ஒரு முனை சொரசொரப்பான தரை மேலும் மற்றொரு முனை வழவழப்பான சுவர் மேலும் உதைந்து நிற்கும் அந்த ஏணி கிடைக்கோட்டிற்கு α அளவு சாய்ந்திருக்கிறது. W எடையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியின் உச்சிவரை அபாயமின்றி ஏற, $\frac{\omega}{W} > \frac{2(1-\mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha-1}$ இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

14. ω எடையுள்ள ஒரு சீரான ஏணி தனது ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவர் மேலும், மற்றொரு முனை சொரசொரப்பான தரை மேலும் உதைந்து நிற்கின்றது. தரை கிடைத் தளத்தில் இல்லாமல் கிடைத்தளத்திற்கு θ அளவு, சுவரிலிருந்து கீழே சாய்ந்திருக்கிறது. λ என்பது உராய்வுக் கோணமானல் அசைவற்ற நிலை எல்லையில் ஏணி சுவருக்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\{2\tan(\lambda-\theta)\}$ எனவும், தரையில் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு எதிர்வினை $W\sec(\lambda-\theta)$ என நிறுவுக.

15. ஓர் ஏணி ஒரு குத்துச்சுவர் மேலும் கிடைத்தளத் தரை மேலும் தன் முனைகள் உதைந்து நிற்கிறது. இரு முனைகளிலும்

உராய்வுக் கோணம் λ. ஏணி கிடைக்கோட்டிற்கு α அளவு சாய்ந்திருக்கிறது. ஏணியின் எடை மிகச்சிறியதெனக் கொண்டு, ஒரு மனிதன் ஏணியின் மேல் ஏணியின் உயரத்தில் $\sin\lambda \sin(\lambda+\alpha) \sec\alpha$ அளவு அபாயமின்றி ஏற முடியுமென நிறுவுக. அவன் உச்சிவரை அபாயமின்றி ஏற முடியுமானால் $\lambda + \alpha > 90°$ ஆக இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக. (ப. க.)

16. W எடையுள்ள ஒரு சீரான ஏணி தனது ஒரு முனை சுவர் மேலும், மற்ற முனை கிடைத்தளத்திலும் உதைந்து கிடைத்தளத்திற்கு θ அளவில் சாய்ந்து நிற்கிறது. சுவருக்கும் ஏணிக்கும் உராய்வுக்கோணம் α. தரைக்கும் ஏணிக்கும் உராய்வுக் கோணம் β. ω எடையுள்ள மனிதன் மெள்ள ஏணி மேல் ஏறி, உச்சிவரை அபாயமின்றிச் செல்ல

$$\frac{W}{2(W+\omega)} > \frac{\cos\beta\,\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta\,\cos(\alpha-\beta)}$$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையென நிறுவுக.

17. கிடைத்தளத்திற்கு θ சாய்வுள்ள ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தின்மேல் ஓர் எடை W நிற்கிறது. அச் சாய்தளத்தின் மேல் அந்த எடையை நகர்த்தத் தேவைப்படும் கிடைக்கோட்டு விசை $\sqrt{3}\,W\sin\theta$-க்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக. மேலும் $\mu = 2\tan\theta$ ஆனால், சாய்தளத்தின் மீப்பெரு சாய்கோட்டிற்கு 60° சாய்வில் அவ்வெடை நகருமென நிறுவுக. (உராய்வுக்கெழு μ எனக் கொள்க.)

18. W என்ற எடையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத்தளத்தில் உள்ள ஒரு மேசைமேல் இருக்கிறது. இரு கயிறுகள் அவ் வெடைக்குக் கட்டப்பட்டு, α அளவு கோணத்தில் உள்ளன. அக் கயிறுகளின் முனைகளில் ω, ω என்ற எடைகள் கட்டப்பட்டு அக் கயிறுகள் இரு கம்பிகள் மேலே சென்று கீழே எடைகளைத் தாங்கி நிற்கின்றன. அவற்றில் ஓர் எடைக்கு W_1 என்ற மற்றோர் எடை சேர்க்கப்படுமானால், அசைவற்ற நிலை எல்லைக்கு

$$W_1 = \frac{\mu(W - 2\omega\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையென நிறுவுக.

19. ஓர் எடை Wஐ ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தில் அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் நிறுத்தி வைக்க, சாய்தளத்தின் மீப்பெரு சாய்வுக்கோட்டில் P என்ற விசை தேவைப்

படுகிறது; இல்லையேல் சாய்தளத்தின் மேல் கிடைக்கோட்டில் Q என்ற விசை தேவைப்படுகிறது. உராய்வுக்கோணம் λ ஆனால், $W = \dfrac{PQ}{\sqrt{Q^2 \sec \lambda - P}}$ என நிறுவுக.

20. இரு சொர சொரப்பான எடைகள் W_1, W_2 என்பவை ஒரு மெல்லிய கயிற்றினால் கட்டப்பட்டு ஒரு சாய் தளத்தின் மேல் அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் நிற்கின்றன. μ_1, μ_2 என்பவை முறையே அவ்வெடைகளுக்கும் சாய்தளத் திற்குமுள்ள உராய்வுக் கெழுக்களானால் சாய்தளத்தின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{\mu_2 W_1 + \mu_1 W_2}{W_1 + W_2}\right)$ என நிறுவுக.

21. ஒரு துகள், ஒரு சொர சொரப்பான கோளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அத் துகளை மையத்தோடு இணைக்கும் நேர்கோடு, குத்துக்கோட்டிற்கு $\tan^{-1}(\mu)$ சாய் விலிருப்பின் அத் துகள் நகரும் தருவாயிலிருக்குமென நிறுவுக.

22. கிடைத்தளத்தில் நிலையாக நிறுத்தப்பட்ட ஓர் அரைக் கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் உள்ளே W எடையுள்ள ஒரு துகள் வைக்கப்பட்டு, அதற்கு ஒரு கயிறு கட்டி, அக் கயிறு கிண்ண விளிம்பின் வெளியே $\frac{1}{2}W$ என்ற எடையைத் தாங்கி நிற்கிறது. கிண்ணத்தின் உள் இருக்கும் கயிற்றுப் பகுதி கிண்ண மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $120°$ ஆனால், உராய்வுக்கெழு $\sqrt{3}$ என நிறுவுக. (ப.க.)

23. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு கனமான கழி ஒரு சொர சொரப் பான மூலைக் குச்சி மேல் வைக்கப்பட்டு ஒரு முனை அதே அளவு சொர சொரப்பான குத்துச் சுவரைத் தொட்டு நிற்கிறது. சுவருக்கும் மூலைக் குச்சிக்குமுள்ள தூரம் c. சுவரைத் தொடும் முனை, மூலைக் குச்சிக்குக் கீழேயிருக்குமானால், கழி கீழே நகரும் தருணத்தில் $\sin^2\theta \sin(\theta + 2\lambda) = \dfrac{c}{a}\cos^2\lambda$ என நிறுவுக. (θ என்பது கழிக்கும் சுவருக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் எனக் கொள்க.) மாறாக சுவரைத் தொடும் முனை மூலைக் குச்சிக்கு உயரத்தில் இருக்குமானால் கழி கீழே நகரும் தருணத்தில் $\sin^3\theta = \dfrac{c}{a}\cos^2\lambda$ என நிறுவிக. (λ என்பது சுவருக்கும் கழிக் கும், மூலைக் குச்சிக்கும் கழிக்கும் உள்ள உராய்வுக் கோண மெனக் கொள்க.)

24. W எடையுள்ள ஒரு சீரான கோளம், α சாய்வுள்ள ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு அதன் மேற் பரப்பில் ஒரு புள்ளியின் தொடுவரை வழியாகச் செல்லும் $\frac{1}{2} W \sin \alpha$ என்ற விசை கொண்டு வலிக்கப்பட்டு அசைவற்ற நிலையில் இருக்கிறது. அவ் விசை சாய்தளத்திற்கு இணையான கோட்டில் செயற்படுகிறதெனவும், உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2} \tan \alpha$-க்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டுமெனவும் நிறுவுக. (ப.க.)

25. ஒரு சீரான அரைக்கோளம், தனது வளைபகுதி ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு வட்டதளம் செங்குத்தாக அசைவற்ற நிலை யெல்லையில் நிற்கிறது. உராய்வுக் கெழு $3/\sqrt{55}$ என நிறுவுக.

26. ஒரு சீரான கோளம் (எடை ω) θ சாய்வுள்ள ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு அதன் உச்சிப் புள்ளியில் சாய்தளத்திற்கு இணையான கோட்டில் செயற்படும் F என்ற விசையால் கோளம் உருண்டு விடாமல் நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. θ என்பது உராய்வுக் கோணத்தை விடச் சிறியது. $F = \dfrac{W \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$ என நிறுவுக. (—) (ப.க.)

27. ஒரு சீரான அரைக் கோள வடிவத் தமைந்த ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் விழாமல் வைக்கப் பட்டு நிற்கிறது. உராய்வுக்கோணம் λ எனில், அரைக் கோளத்தின் தட்டைத் தளம் கிடைத்தளத்திற்கு சாய்ந்தி ருக்கும் கோணம் $\sin^{-1}(2 \sin \lambda)$ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாதென நிறுவுக. (ப.க.)

28. ஒரு சீரான அரை வட்டத் தகடு, தனது வளை பகுதி ஒரு சொர சொரப்பான குத்துச் சுவரையும், ஒரு சொர சொரப் பான கிடைத் தரையையும் தொட்டுக் கொண்டு நிற்கிறது. அத் த்கட்டின் எல்லை கட்டும் விட்டம், கிடைத் தளத்திற்கு $\sin^{-1}\left(\dfrac{\mu + \mu^2}{1 + \mu^2} \cdot \dfrac{3\pi}{4}\right)$ -க்கு மேற்பட முடியாதென நிறுவுக.

(இரு இடங்களிலும் உராய்வுக் கெழு μ எனக் கொள்க.)

29. மேற் கணக்கில், பொருள் ஓர் அரை வட்டத் தகடா யில்லாமல் ஓர் அரைக் கோளமாயிருந்தால், அது நகரும் தருவாயிலிருக்கும் போது அதன் வட்ட தளப்பகுதி கிடைத்

தளத்திற்கு $\sin^{-1}(1 + \sin 2\lambda - \cos 2\lambda)$ அளவு சாய்ந்திருக்கும் என நிறுவுக. (λ என்பது உராய்வுக் கோணம்.)

30. ஓர் உருளை வடிவான சொர சொரப்பான பாத்திரத்தில், ஒரு கழி சற்று வெளியே நீட்டிக் கொண்டு, மீதிப்பகுதியின் முனை அப் பாத்திரத்தின் பக்கத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு நிற்கக் கூடும். அப்படி நிற்குங்கால், குத்துக் கோட்டுக்கும் அக் கழிக்கும் இடைப்பட்ட மீப்பெரு, மீச்சிறு கோணங்கள் முறையே α, β எனில், உராய்வுக் கோணமானது

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{\sin^3\alpha - \sin^3\beta}{\sin^2\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\beta}\right\}$$ என நிறுவுக.

31. ஒரு சீரான சம பக்க முக்கோணம் ஒரு குத்துச் சுவரிலும், கிடைத் தரையிலும் ஒவ்வொரு முனை தொட்டுக்கொண்டு குத்துத் தளத்தில் நிற்கிறது. சுவர் வழவழப்பானது; கிடைத் தரை சொர சொரப்பானது; உராய்வுக் கெழு μ. தொடும் முனைகளைச் சேர்க்கும் கோடு குறைந்த பட்சம் கிடைத் தளத்தோடு சாய்ந்திருக்கும் கோணம்

$$\cot^{-1}\left(2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ என நிறுவுக. (ப.க.)

32. ஒரு கனசதுர அமைப்பிலுள்ள ஒரு கட்டை ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத் தளத்திலுள்ளது; உராய்வுக் கெழு μ. குத்துத் தளத்திலிருக்கும் ஒரு முகம் மேல், அம் முக தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அக் கனசதுர பு. மையம் வழியாகச் செல்லும். குத்துத் தளத்தில் ஒரு சிறு விசை கிடைக்கோட்டில் செயற்படுகிறது; அவ் விசை மெல்ல மெல்ல வளர்கிறது. விசை செயற்படும் புள்ளி தாங்கி நிற்கும் கிடைத் தளத்திற்கு $\frac{a}{\mu}$-க்கு மேற்பட்ட உயரத்திலிருக்கிறது. அப்படியானால், $\mu < \frac{1}{2}$ ஆயின், கன கதுரம் கவிழாது நகர ஏதுவாகும் எனவும், $\mu > \frac{1}{2}$ ஆயின் நகராது கவிழ்ந்துவிட ஏதுவாகுமெனவும் நிறுவுக. (கன சதுரப் பக்கம் $2a$ எனக் கொள்க.)

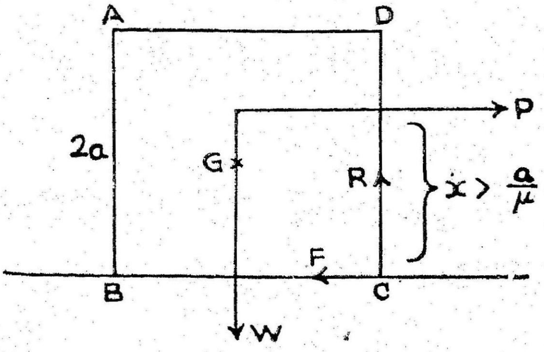
குறிப்பு : (படம் 9-5.8)-ல் விசைகளும் மற்ற விவரங்களும் குறிப்பிடப்பட்டிருப்பது காண்க.

W — எடை

P — வெளிவிசை

R — எதிர்விளை

F — உராய்வு விசை



படம் 9-5·8.

33. ஒரு கன உருளையின் ஆரம் r, உயரம் h; ஒரு வட்ட முகம் ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத் தளத்தின் மேல் அமையும் வகையில் செங்குத்தாக நிற்கிறது. மேலே இருக்கும் வட்ட முக மையம் வழியாகச் செல்லக் கூடிய ஒரு கிடைக் கோட்டில் ஒரு விசை செயற்படுகிறது. அவ்விசை வளர, வளர $r > \mu h$ ஆயின், அவ் வுருளை கவிழாது நகர ஏதுவாகு மெனவும், $r < \mu h$ ஆயின் நகராது கவிழ ஏதுவாகுமெனவும் நிறுவுக. தாங்குதளம் கிடைத் தளமாயில்லாது, ஒரு சாய்தள மாயிருப்பின், சாய்தளத்தின் சாய்வை மெல்ல உயர்த்தினால்

$\mu < \frac{2r}{h}$ ஆயின்; முதலில் உருளை நகர ஏதுவாகுமெனவும்,

$\mu > \frac{2r}{h}$ ஆயின் முதலில் உருளை கவிழ ஏதுவாகுமெனவும்,

$\mu = \frac{2r}{h}$ ஆயின், நகர்வதும் கவிழ்வதும் ஒருங்கே நேரஏதுவாகு மெனவும் நிறுவுக.

34. ஒரு வட்டத்தளமுள்ள ஒரு சீரான கூம்பின் உச்சி அரைக்கோணம் α; அது ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத் தளத்தில் உச்சி மேலிருக்கும் வண்ணம் செங்குத்தாக நிற்கிறது. அதன் உச்சியில் ஒரு கயிறு கட்டி, கிடைக்கோட்டிலுள்ள ஒரு விசையால் கயிறு மெல்ல இழுக்கப்படுகிறது. $\alpha > \lambda$ ஆயின், அக் கூம்பு கவிழாது நகருமெனவும், $\alpha < \lambda$ ஆயின், நகராது கவிழ ஏதுவாகுமெனவும் நிறுவுக.

35. *ABC* என்ற ஒரு முக்கோணத் தகட்டில் *B* ஒரு செங்கோணம். ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் *BC* பொருத்தப்பட்டு *B* கீழும், *C* மேலுமாக நிற்கிறது. சாய்தளத்தின் சாய்வு உயர்த்தப்படுகிறது. உராய்வுக்கெழு $< \tan A$ ஆயின், தகடு கவிழாது நகருமெனவும், $> \tan A$ ஆகின் தகடு நகராது கவிழ ஏதுவாகுமெனவும் நிறுவுக.

36. *ABCD* ஒரு சீரான சதுரத் தகடு; α அளவு கிடைத்தளத்திற்குச் சாய்ந்த ஒரு சொர சொரப்பான சாய்தளத்தின் மேல் அது குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பெற்று, *A* என்ற முனை உயரத்திலிருக்கிறது. *T* என்பது சாய்தளத்தின் மேல் இடம்; *A*-ம் *T*-ம் ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ளன. *AT* வழியாக ஒரு விசை மெல்ல மெல்ல அதிகமாகிச் செயல்படுகிறது. உராய்வுக்கோணம் $\lambda.\ (1 + \tan \alpha) < 2 \tan\ (\alpha + \lambda)$ ஆயின், அத்தகடு நகர்வதற்கு முன் கவிழ ஏதுவாகுமென நிறுவுக.

37. முறையே *W*, 2*W* எடையுள்ள, ஆனால் சமநீளமுள்ள *AB*, *BC* என்ற இரு சட்டங்கள் *B*-ல் வழ வழப்பான கீல் கொண்டு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. *ABC* ஒரு செங்கோணமாயிருக்கிறபடி *A*, *C* என்ற முனைகள் ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, அந்த நிலை மாறாது அசைவற்று இருக்குமானால், உராய்வுக்கெழு *0*.6-க்குக் குறையாமலிருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

38. இரு சீரான சமஎடை, சமநீளம் 2 *a* உள்ள இரு சட்டங்கள் வழ வழப்பான கீல்கொண்டு இணைக்கப்பட்டு, *G* ஆரமுள்ள ஒரு சொர சொரப்பான கோணத்தின் மேல் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. உராய்வுக்கெழு $\frac{c}{a}$ ஆனால், அசைவற்ற நிலையெல்லையில் அவ்விரு சட்டங்களுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் $2\ \tan^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ என நிறுவுக.

39. மேல் கணக்கில் கூறப்பட்டபடி *AB*, *BC* என இணைக்கப்பட்ட இரு சட்டங்களான அமைப்பில் ஒரு முனை சொர சொரப்பான கிடைத்தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு, மற்றொரு முனை தூக்கிப்பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது. *CB*–ம் *BA*-ம் முறையே கிடைக்கோட்டுக்கு α, β அளவு சாய்ந்திருக்குமானால், உராய்வுக்கெழு குறைந்தபட்சம் $\frac{2}{\tan \beta - 3 \tan \alpha}$ மதிப்புடையதாயிருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

40. இரு சீரான சம எடைகள் (W, W) சம நீளங்கள் உள்ள இரு சட்டங்கள் AB, CD என்பவை தங்கள் மையத்தில் வழவழப்பான கீல்கள் கொண்டு இணைக்கப்பட்டு, A, C என்ற முனைகள் ஒரு சொர சொரப்பான கிடைத் தளத்தின் மேல் குத்துத் தளத்தில் உள்ளவாறு நிறுத்தி வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. உராய்வுக் கெழு μ. இரு W எடைகளும் ஒரு கயிற்று முனைகளில் கட்டப்பட்டு, அக் கயிறு B, D-ன் மேல் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. அசைவற்ற நிலை எல்லையில் அவ்வமைப்பு நிற்கும் போது, அச் சட்டங்கள் கிடைத்தளத்திற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{1+2\mu}\right)$ என நிறுவுக.

41. இரு சம நீளமுள்ள ஏணிகள் (விலக்கத்தக்க எடையுள்ளவை) தம் முனைகளில் ஒரு வழவழப்பான கீலால் இணைக்கப்பட்டு இடைப்பட்ட கோணம் 2α உள்ளவாறு அடி முனைகள் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு, சொர சொரப்பான கிடைத் தளத்தில் நிற்கின்றன. W எடையுள்ள பாரம் ஒன்றை இணைக்கப்பட்ட இடத்தில் வைத்தால், உராய்வுக் கோணம் $\lambda > \alpha$ ஆனால், கயிற்றில் ஒருவித இழு விசையும் செயற்படாதெனவும், $\lambda < \alpha$ ஆயின், அக் கயிற்றில் செயற்படும் இழுவிசை $W(\tan\alpha - \tan\lambda)$ ஆக விருக்கு மெனவும் நிறுவுக.

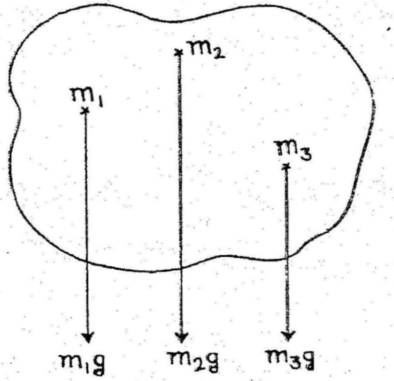
10. புவியீர்ப்பு மையம்

(Centre of Gravity)

10–1. ஒவ்வொரு பொருளிலுமுள்ள ஒவ்வொரு துகளும், உலக மையத்தின்பால் ஈர்க்கப்படுகிறது; அவ்வீர்ப்பு விசை அத் துகளின் பொருண்மைக்கு நேர்விகிதத்திலுள்ளது. ஒவ்வொரு பொருளையும் எண்ணற்ற துகள்களின் கூட்டு அல்லது தொகுதி (இறுக்கச் சேர்க்கை) எனக் கொள்ளலாம்.

இம் மாபெரும் உலகத்தின் அளவோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும் போது, உலகத்தில் உள்ள யாவும் சிறு பொருள்களால் ஆன தால், எந்தப் பொருளின் துகள்களையும் புவிமையத்தையும் இணைக்கும் கோடுகள் எல்லாம் ஏறக்குறைய இணைகோடு களாகவே யிருக்குமெனக் கொள்ளலாம். புவிமட்டத்தின்மேல் உள்ள (பல துகள்களின் கூட்டான) ஒரு பொருளின் துகள்கள் புவிமையத்திலிருந்து ஏறத்தாழ 6400கி. மீ. தூரத்திலுள்ளதால், அத் துகள்களையும் மிக மிக தூரத்திலுள்ள புவிமையத்தையும் இணைக்கும் கோடுகள் ஏறக்குறைய இணைகோடுகளாயிருக்கு மென்று கொள்வதால் தவறேதுமேற்படாது. இந் நூலைப் பொறுத்தமட்டில் அத் துகள்களையெல்லாம் புவி தன் மையம் நோக்கி ஈர்க்கும் விசைகள் யாவும் இணைகோடுகளில் செயற்படு கின்றன எனக் கொள்ளப்படும். எனவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் துகள்கள் மேல் செயற்படும் விசைகள் யாவும் நேர் குத்துக் கோடுகளின் வழியாகக் கீழே செயற்படுகின்றன. (படம் 10–1 பார்க்க) அவ் விசைகளின் கூட்டுத்தொகை, அவற்றின் எடை (weight)எனக்கூறப்படுகிறது. அவ் விசைகள் தரும் முடுக்கம் g எனக் கொள்ளப்படுவதால், அவ் விசைகளின் அளவு, (படம்...10–1.)-ல் காட்டியபடி $m_1 g$, $m_2 g$, ... எனக் கொள்ளப்படுகின்றன. இணைகோடுகளில் இயங்கும் பல விசை-

களின் (கூட்டு) விளைவு விசை காணும் முறைப்படி, பல துகள்களின் எடைகளை ஒரே விசையாகக் (கூட்டிக்) கண்டால், அவ் விசை அத் துகள்களின் எடைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.



படம் 10-1.

அந்த (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடம், முதற் கூறப்பட்ட இணைவிசை அளவுகளையும் அவை செயற்படும் புள்ளிகளையும் மட்டுமே சார்ந்ததே யொழிய, அவ் விசைகளின் திசைகளைச் சார்ந்ததல்ல. எடுத்துக்காட்டாக (x_1, y_1); (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளில் P_1, P_2 என்றஇரண்டு இணை விசைகள் எந்தத் திசையில் செயற்பட்டாலும், அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\left(\dfrac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}, \dfrac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}\right)$ என்ற புள்ளியில்தான் செயற்படும். எனவே, ஒரு பொருளை எப்படிப் பிடித்தாலும், எந்தவிதமாகத் திருப்பினும், அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் அப் பொருளில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலேயே அமைந்திருக்கும். அவ்வாறன புள்ளியே அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் எனப்படும். எனவே, பின்வரும் வரையறை பொருத்தமாகும்.

10-2. புவியீர்ப்பு மையம்

ஒரு பொருள் எந்த நிலையில் வைக்கப்பட்டாலும், அப் பொருளின் எடை எனப்படும் விசை செயற்படும் கோடு எப்போதும் எப்புள்ளி வழியாகச் செல்லுகிறதோ அப் புள்ளியே அப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மைய மெனப்படும்.

இவ்வரையறை, கட்டிறுக்கமாகப் பிணைக்கப்பட்ட பல துகள்களின் தொகுதியின் (அல்லது கூட்டத்தின்) புவியீர்ப்பு மையம் என்பதற்கும் பொருந்துவதாகும்.

செயற்படும் புள்ளிகள் மாறுதிருப்பின், $m_1 g$, $m_2 g$,......என்ற இணைவிசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை எப் புள்ளியில் செயற்படுகிறதோ, அதே புள்ளி வழியாகத்தான் m_1, m_2, ... என்ற இணைவிசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் என்பதை நாம் எளிதில் காணலாம். முதற் கூறிய புள்ளி புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity) எனவும், பின் கூறிய புள்ளி பொருண்மை மையம் (Centre of mass) எனவும் கூறுவது மரபு; ஏனெனில், m_1, m_2,...... என்பவை முதற்கூறிய எடைகளின் பொருண்மையாகும்.

ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம், அப்பொருளை யொட்டி ஒரு நிலைத்த புள்ளியென நிறுவலாம். இவ் வுண்மை புவியீர்ப்பு மையத்தின் வரையறையின் அடிப்படையாகப் பெறப்படுவதாகும். வேண்டுமானால், ஒரு பொருளின் ஒரு நிலையில் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 எனவும், அதே பொருளின் மற்றொரு நிலையில் G_2 எனவும் கொண்டு இது இயலாத வொன்றாகும் என நிறுவோம்.

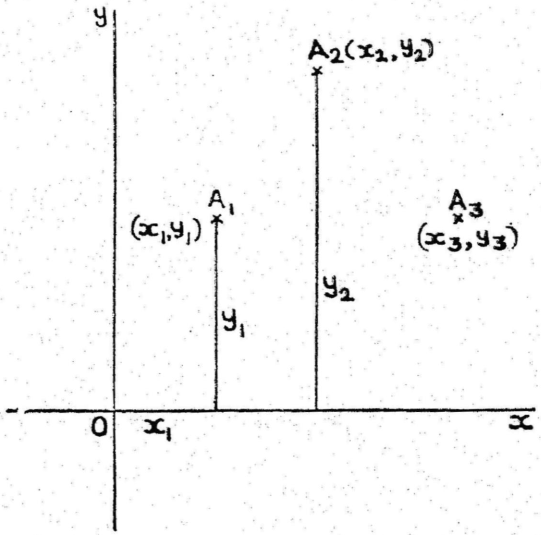
G_1ஐயும் G_2ஐயும் இணைக்கும் கோடு கிடைக்கோடாக இருக்கும் வகையில் அப் பொருளைப் பிடிப்போம். வரையறைப் படி: அப் பொருளின் எடை G_1, வழியாகவும் G_2 வழியாகவும் செயற்படுவதால், G_1 G_2 என்ற நேர்கோட்டில் செயற்பட வேண்டும்; அதாவது அதன் எடை ஒரு கிடைக்கோட்டில் செயற்படும் என்ற பொருத்தமற்ற ஒரு முடிவு பெறப்படுகிறது. எனவே, ஒரு பொருளுக்கு ஒரே ஒரு புவியீர்ப்பு மையம்தான் இருக்கமுடியும்.

ஆனால், இப் புள்ளி அப் பொருளிலேயே அமைந்திருக்க வேண்டுமென்ற வலுக்கட்டாயம் ஒன்றுமில்லை. ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம், அப் பொருளிலேயே ஒரு நிலைத்த புள்ளியாக விருக்கலாம்; அல்லது அப் பொருளைச் சார்ந்த ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகவும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு அரைக் கோள வடிவிலுள்ள ஒரு கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அக்கிண்ணத்தின் குழிவில் ஒரு புள்ளியாகவிருக்கும்; அக் கிண்ணத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாக இராது.

10-2.1. பல துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையம்

A_1, A_2, A_3, ... என்ற புள்ளிகளில் ω_1, ω_2, ω_3 ...... எடையுள்ள துகள்கள் இருப்பனவாகக் கொள்வோம். OX, OY என்ற ஆய அச்சுக்களையொட்டி அப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

(x_1, y_1), $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ ……… எனக்கொள்வோம். OY அச்சிலிருந்து அப்புள்ளிகளின் தொலைவுகள் x_1, x_2, x_3 …… ஆகும்; OX-லிருந்து y_1, y_2, y_3……ஆகும். இந்தத் துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையம் $G\ (\bar{x},\ \bar{y})$ எனக் கொள்வோம். இந்த எடைகளின்



படம் 10·2.

(கூட்டு) விளைவு விசை $\sum \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots\ldots$. OX, OY அச்சுகளையொட்டி (கூட்டு) விளைவு விசையின் திருப்புத்திறன், அவ்வச்சுக்களையொட்டி ஒவ்வோர் எடையின் திருப்புத் திறனின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

OY அச்சையொட்டி எடைகளின் திருப்புத்திறன்

$$= \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \sum \omega x$$

OY ஐ யொட்டி (கூட்டு) விளைவின் திருப்புத்திறன்

$$= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots)\ \bar{x}$$

$$= \bar{x} \sum \omega$$

$$\therefore\ \bar{x} \sum \omega = \sum (\omega x)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum (\omega x)}{\sum \omega}$$

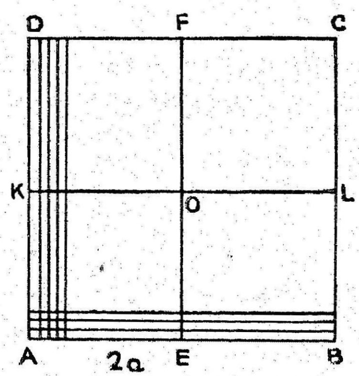
இதேபோன்று OX ஐப் பொறுத்து திருப்புத்திறன்கள் எடுத்தால், $\bar{y} = \dfrac{\sum (\omega y)}{\sum \omega}$

10-2.2. சில சீரான வடிவ கணித உருவந்தாங்கிய பொருள்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் பின்னே கூறப்பட்டிருக்கின்றன. அவை 'பு. மை' என்ற இரு எழுத்துகளால் இனிச் சுருக்கமாக வழங்கப்படும். இந்நூலாசிரியரால் எழுதப்பட்ட "தொகை நூல் கணிதம்" என்ற நூலில் பகுதி 14-ல் சில பொருள்களின் பு. மை பெறப்பட்டிருப்பதை, பின்னர் கண்டு கொள்க. (அங்கு இப் புள்ளி, புவிக்கவர்ச்சி மையம்—பு. க. மையம் என்ற சிறிது மாறுபட்ட பெயரால் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. புவியீர்ப்பு மையமெனினும், புவிக்கவர்ச்சி மையம் எனினும் ஒன்றுதான்.)

வேறொன்றும் கூறப்படாவிடத்து, பொருள்கள் சீரான அடர்த்தி (uniform density) பெற்றவை யென்றே கொள்க.

10.2.2.1. 1. **ஒரு மெல்லிய சீரான நேர்க் கம்பி அல்லது கழி**

AB என்ற கம்பியின் மையப்புள்ளி M என்பதே இதன் பு. மை ஆகும்.



படம் 10-2.2.2.

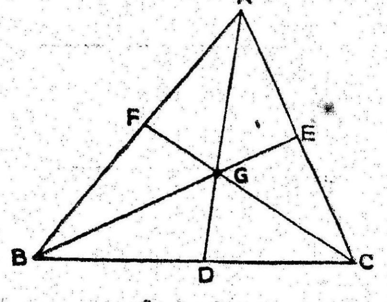
10-2.2.2. **2. ஒரு மெல்லிய சதுரப் பலகையின் (தகட்டின்) பு. மையம்**

(படம் 10–2.2.2)-ல் $ABCD$ ஒரு சதுரப் பலகை — நீள அகலம் $2\,a$. AB-க்கு இணையாக நெருக்கமாகக் கோடுகள்

வரைந்தால் ஒவ்வொன்றும் 2 a நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய கம்பி அல்லது தகடு எனக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு கம்பியின் பு. மையம் அதன் மையப் புள்ளியில் இருக்கும், எனவே AB–ன் மையப்புள்ளி E-ன் வழியாக EF என BC-க்கு ஓர் இணைகோடு வரைந்தால், அச்சிறு சிறு மெல்லிய கம்பிகளின் பு. மையங்கள் யாவும் EF-ன் மேலிருக்கும். அவ்வாறே AD-க்கு இணையான சிறு கம்பிகளாக அச் சதுரத்தைப் பிரித்தால் அச்சிறு சிறு மெல்லிய கம்பிகளின் பு. மையங்கள் யாவும் KL–ன் மேலிருக்கும் ($KL \parallel AB$; K என்பது AD-ன் மையம்) எனவே, EF-ம் KL-ம் வெட்டிக் கொள்ளும் O என்ற புள்ளியில் அச் சதுரத் தகட்டின் பு. மையம் இருக்கும். O என்பது மூலை விட்டங்கள் AC–ம் BD-ம் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியெனவும் கொள்ளலாம்.

இவ்வாறே ஒரு மெல்லிய செவ்வகத் தகடு, ஓர் இணைகர உருவந்தாங்கிய செவ்வகத் தகடு முதலியவற்றின் பு. மையங்கள், நடுக் கோடுகள் வெட்டுமிடத்திலோ, அல்லது மூலை விட்டங்கள் வெட்டு மிடத்திலோ இருக்குமென அறிந்து கொள்ளலாம்.

10-2.3.3. **3. ஒரு மெல்லிய முக்கோணத் தகடு :** மேற் கூறிய முறைப்படியே ஒரு முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையம், அதன் மையக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியான மையக் கோட்டு சந்தியில் இருக்கும். (படம் 10–2.3.3. காண்க)



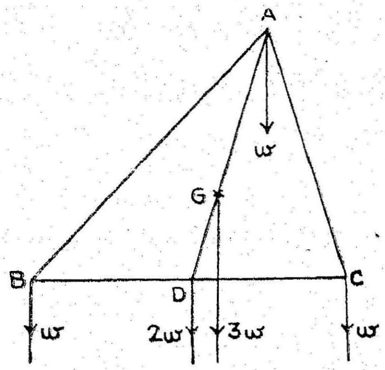
படம் 10-2.3.3.

G என்பது ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையம்; AD, BE, CF மையக் கோடுகளாயின், வடிவ கணிதப்படி

$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$ என நமக்குத் தெரியும்.

இதையொட்டி, பின்வரும் உண்மையை நிறுவலாம்:

A, B, C என்ற முனைகளில் ω, ω, ω என்ற மூன்று சம எடைகள் இருக்குமானால், இவ் வெடைகளின் பு. மையமும் ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையமும் ஒன்றேதான், அதாவது அப் பு. மையம் G தான் என நிறுவலாம்.



படம் 10-2.3.31.

(படம் 10-2.3.3.1. காண்க.) A, B, C என்ற மும்முனைகளிலும் ω, ω, ω என்ற சம எடைகள் குத்துக் கோடுகளில் கீழே செயற்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம்.

B, C என்ற புள்ளிகளில் செயற்படும் ω, ω என்ற விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை $2W$ என்பது BC-ன் மையப் புள்ளியான D-ல் செயற்படும். இப்போது A-ல் செயற்படும் ω-க்கும்; D-ல் செயற்படும் இணை விசை $2W$-க்கும் (கூட்டு) விளைவு விசை $3W$, AD-ன் மேல் $AG : GD = 2 : 1$ என்ற வகையில் அமைந்த G என்ற புள்ளியில் செயற்படும்.

எனவே, இம் மூன்று எடைகளின் பு. மையம் G, அதாவது AD என்ற மையக் கோட்டின் மேல் $AG : GD = 2 : 1$ என்ற வகையில் அமைந்த புள்ளி. இதுவேதான் ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையமாதலால், நாம் தொடக்கத்தில் கூறிய உண்மை நிறுவப்படுகிறது.

எனவே, மேற் கூறியதை மற்றொரு வகையில் கூறுவோமாயின்,

"ஒரு சீரான மெல்லிய முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையமும், அம் முக்கோணத்தின் முனைகளில் மூன்று சமமான எடைகள், ஒவ்வொன்றும் முக்கோணத் தகட்டின் எடையில் மூன்றிலொரு பங்கு வைக்கப்படுமானால் அவற்றின் பு. மையமும் ஒன்றே" என்ற உண்மை பெறப்படும். (முனைகளில் சமமான எந்த மூன்று எடைகள் இருந்தாலும், இது பொருந்துமெனக் காண்க)

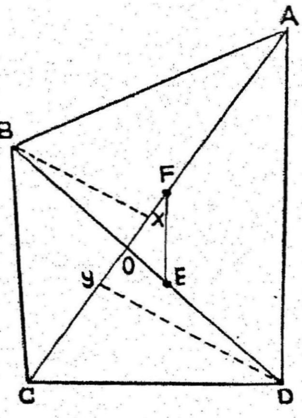
ஒரு குறிப்பிட்ட OX, OY என்ற செங்குத் தச்சுகளை யொட்டி A, B, C-ன் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கொண்டால்,

G-ன் ஆயத் தொலைகள்,

$$\bar{x} = \frac{\omega x_1 + \omega x_2 + \omega x_3}{3\omega} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{\omega y_1 + \omega y_2 + \omega y_3}{3\omega} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

எனப் பெறப்படும்.



படம் 10-2.3.4.

10-2.3.4. **ஒரு நாற்கர உருவத்தில் உள்ள ஒரு சீரான தகடு :** (படம் 10-2.3.4)-ல் $ABCD$ ஒரு நாற்கரத் தகடு.

AC என்ற மூலைக்கோடு, அந் நாற்கரத்தை இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது. ABC-ன் எடை ω_1 எனவும், ACD-ன் எடை ω_2 எனவும் கொண்டால், நாற்கரத் தகட்டின் முழுஎடை $\omega_1 + \omega_2$.

AC-ன் மேல் B-லிருந்து வரையப்படும் குத்துத் தூரம் BX எனவும், AC-ன் மேல் D-லிருந்து வரையப்படும் குத்துத் தூரம் DY எனவும் கொண்டால்

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\triangle ABC}{\triangle ACD} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BX}{\frac{1}{2} AC \cdot DY}$$

$$\therefore \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BX}{DY}$$

BX, DY இரண்டும் AC-க்குக் குத்துக் கோடுகளாதலால், $BX \parallel DY$ என நாம் காண்கிறோம்.

$\triangle BXO$-ம் $\triangle DYO$-ம் வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலால்,

$$\frac{BX}{DY} = \frac{BO}{OD}$$

$$\therefore \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BO}{OD}$$ என நாம் பெறுகிறோம்.

ABC-க்குப் பதிலாக $\frac{\omega_1}{3}$, $\frac{\omega_1}{3}$, $\frac{\omega_1}{3}$ என்ற எடைகள் A, B, C-ல் முறையே வைக்கப்பட்டால், இம் மூன்று எடைகளின் பு. மையமும் முக்கோணத் தகடு ABC-ன் பு. மையமும் ஒன்றே.

அவ்வாறே ACE-க்குப் பதிலாக $\frac{\omega_2}{3}$, $\frac{\omega_2}{3}$, $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற எடைகள் A, C, D-ல் முறையே வைக்கப்பட்டால் இம் மூன்று எடைகளின் பு. மையமும், முக்கோணத் தகடு ACD-ன் மையமும் ஒன்றே.

எனவே, இப்போது நாற்கரத்தின் பு. மையமும்

$$\left. \begin{array}{l} A\text{-ல் } \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3} \\ B\text{-ல் } \frac{\omega_1}{3} \end{array} \right\} \quad X$$

$$\left.\begin{array}{l} C\text{-ல் } \dfrac{\omega_1}{3} + \dfrac{\omega_2}{3} \\ \\ D\text{-ல் } \dfrac{\omega_2}{3} \end{array}\right\} X$$

என்ற எடைகளின் பு. மையமும் ஒன்றுகும்.

இப்போது B-ல் $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற விசையையும், D-ல் $\frac{\omega_1}{3}$ என்ற விசையையும் சேர்த்து, அவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை $\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ செயற்படும் இடத்தில், நேரெதிர்த் திசையில் $\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ என்ற விசையும் சேர்த்தால், இக் கூட்டலும் எதிர்ச் சேர்ப்பும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரீடு செய்து கொண்டு, நிலையை மாற்றுது.

பழைய நிலையான

(1) A-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(2) B-ல் $\frac{\omega_1}{3}$

(3) C-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(4) D-ல் $\frac{\omega_1}{3}$ — என்பதும்

புது நிலையான

(1) A-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(2) B-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(3) C-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(4) D-ல் $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(5) எதிர்ச் சேர்க்கை $\frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3}$

(B-ல் $\frac{\omega_2}{3}$-ம், D-ல் $\frac{\omega_1}{3}$ -ம் சேர்ந்த (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும் இடம்)

என்பது ஒரே பு. மையம் பெற்றவை.

இரண்டாவது நிலையில் முதல் நான்கு விசைகளும் சமமா யிருப்பதால்,

AC-ன் மையமாகிய F என்ற புள்ளியில் AC-ல் செயற்படும் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்படும்.

BD-ன் மையமாகிய E என்ற புள்ளியில் B, D-ல் செயற்படும் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு செயற்படும்.

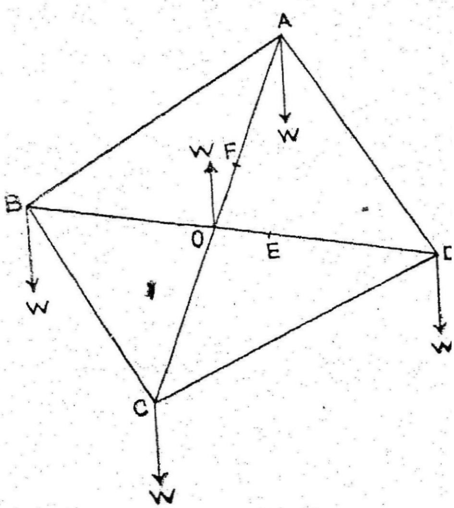
அக் (கூட்டு) விளைவு விசைகள் இரண்டும் சமம்; அளவு $\frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}$; இவ்விரு விசைகளின் (கூட்டு)விளைவு விசையான $\frac{4}{3}(\omega_1 + \omega_2)$, EF-ன் மையத்தில் செயற்படும்; எஞ்சியிருப்பதை $-\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right)$ எனக் கூறலாம்; செயற்படும் இடம் O; ஏனெனில், $\frac{BO}{OD} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

இவை யாவும் நாம் மனதிற்கொண்டு பார்க்கும்போது ஒரு நாற்கரத்தின் பு. மையமும், அந் நாற்கரத்தின் முனைகளில் நான்கு சம எடைகளும், அதே எடை நேர் எதிர்ப்புறமாக நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் வெட்டுமிடத்திலும் செயற்பட்டால் பெறப்படும் பு. மையமும் ஒன்றே எனப் பெறப்படுகிறது. (படம் 1-2.3.4. பார்க்க).

குறிப்பு 1: $W = \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ என எடுத்துக் கொள்வதும் பொருத்தமே. ஆனால், இச்சிறப்பான மதிப்பு W-க்குத் தேவையில்லை.

குறிப்பு 2: ஐந்தாவது எடை நேர் எதிர்ப்புறம் செயற்படுகிறது என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக குறைக் குறியுடைய எடை என்று அதைக் கூறலாம். (ஏனெனில் எடை எப்போதும் கீழே தான் குத்துக்கோட்டுத் திசையில் செயற்படும்.)

குறிப்பு 3. : இப்போது (X)எனக் குறிப்பிடப்பட்ட நான்கு எடைகளுக்கு மையம் கண்டோம். A-ல் $\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{3}$ C-ல்

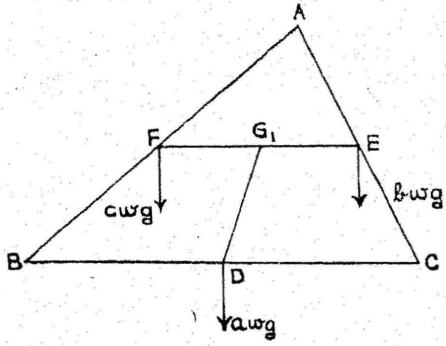


படம் 10-2.3.4.1.

$\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{3}$ என்ற இரண்டிற்கும் பு. மையம் AC-ன் மையப் புள்ளியான F-ல் இருக்கும். F-ல் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு விசை $2 \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{3}$. B-ல் $\frac{\omega_1}{\omega_3}$, C-ல் $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற இரண்டிற்கும் பு. மையம் $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{ED}{BE}$ என்பதற்குப் பொருந்த BD-ன் மேல் E என்ற புள்ளியில் இருக்கும். [முன்னர் $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BO}{OD}$ என நாம் நிறுவியதைக் காண்க. எனவே, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{BO}{OD} = \frac{ED}{BE}$] E-ல் செயற்படும் (கூட்டு) விளைவு விசை $\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ ஆக E-ல்செயற்படும் $\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ என்ற எடைக்கும் F-ல் செயற்படும் $2\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right)$ என்ற எடைக்கும் பு.மையம் EF-ன் மேல் உள்ள

ஒரு புள்ளி G ஆகும்; $\frac{EG}{GF} = \frac{2}{1}$ என்ற வகையில் G அமையும். இவ்வாறு பெறப்படும் G தான் நாற்கரத்தின் பு. மையம் எனவும் கொள்ளலாம்.

10-2.3.5. **மூன்று சீரான கெட்டிக் கம்பிகளில் (நீளம் முறையே** a, b, c **உள்ளவை) ஆன ஒரு முக்கோணம்.** (முக்கோணத்தகடு இல்லை.)



படம் 10-2.3.5.

கம்பிகளின் அடர்த்தி ω எனக்கொண்டால் BC-ன் மையம் D-ல் $a\,\omega\,g$ என்ற எடையும், CA-ன் மையம் E-ல் $b\,\omega\,g$ என்ற எடையும், AB-ன் மையம் F-ல் $c\,\omega\,g$ என்ற எடையும் செயற்படுகின்றன.

F-ல் செயற்படும், $c\,\omega\,g$ என்ற எடைக்கும், E-ல் செயற்படும், $b\,\omega\,g$ என்ற எடைக்கும் பு. மையம் $\frac{FG_1}{G_1E} = \frac{b\,\omega\,g}{c\,\omega\,g}$ என்ற வகையில் G_1 என்ற புள்ளியில் இருக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{FG_1}{G_1E} = \frac{b}{c} = \frac{b/2}{c/2}$$

$DE = \frac{c}{2}$, $EF = \frac{a}{2}$, $FD = \frac{b}{2}$ என நாம் வடிவ கணித முறைப்படி அறிவோம். எனவே, DEF என்ற முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொண்டால் $\angle FDE$-ன் இருசம வெட்டி EFஐ G_1-ல் சந்திக்கும்; ஏனெனில் $\frac{FG_1}{G_1E} = \frac{DF}{DE} = \frac{b/2}{c/2}$.

எனவே, F, E-ல் உள்ள $c\,\omega\,g$, $b\,\omega\,g$ என்ற எடைகளின் பு. மையம் $\angle FDE$-ன் இரு சமவெட்டியின் மேல் (அதாவது அந்த இரு சமவெட்டி EFஐச் சந்திக்கும் புள்ளியில்) இருக்கும். இப்போது D-ல் செயற்படும் $a\,\omega\,g$ என்ற எடையையும் எடுத்து கொள்வோமானுல், $c\,\omega\,g$, $b\,\omega\,g$, $a\,\omega\,g$ என்பவற்றின் பு. மையம் $\angle FDE$-ன் இரு சமவெட்டியின் மேல் இருக்கும். இவ்வாறே $a\,\omega\,g$, $b\,\omega\,g$; $c\,\omega\,g$-ன் பு. மையம் மற்றிரு கோண இரு சமவெட்டிகள், அதாவது $\angle DEF$, $\angle DFE$ என்ற கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளின் மேல் இருக்கும். இம் மூன்று கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளுக்குப் பொதுவான புள்ளி $\triangle DEF$-ன் உள் வட்ட மையமாதலால்,

AB, BC, CA என்ற மூன்று கம்பிகளாலான முக்கோணத்தின் பு. மையம் அம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையத்தில் இருக்குமென நிறுவப்படுகிறது.

10-2.3.5.1. **மாற்று முறை :** (படம் 10-2.3.5)-ல் F-லும் E-லும் உள்ள $c\omega g$, $b\omega g$ என்ற எடைகளின் பு. மையம் G-ல் இருக்கிறதென்றும், G_1 என்ற புள்ளி $\angle FDE$-ன் இரு சமவெட்டி EFஐச் சந்திக்குமிடமென்றும் நிறுவிஞேம்.

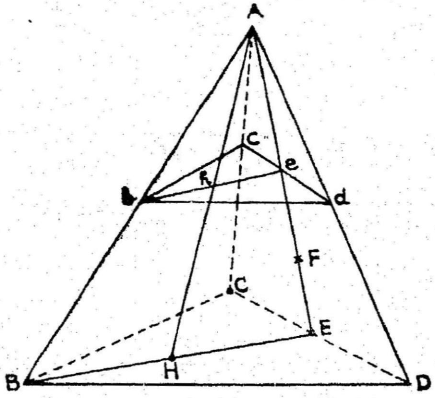
இப்போது G_1-ல் $(b+c)\,\omega g$ என்ற எடையும், D-ல் $a\omega g$ என்ற எடையும் உள்ளதால், அவ்விரண்டிற்குமான பு. மையம் $G_1 D$-ன் மேல்,

$G_1G : GD = a\omega g : (b+c)\,\omega g = a : (b+c)$ என்ற பொருத்த முடைய G-ல் இருக்கும். $\Delta\, G_1ED$-ல் $ED = \dfrac{c}{2}$,

$G_1E = \dfrac{a\,c}{2\,(b+c)}$ (வடிவ கணிதப்படி) எனவே $\angle G_1ED$-ன் இருசம வெட்டி G_1Dஐச் சந்திக்குமிடம் G_1Dஐ $\dfrac{a\,c}{2\,(b+c)} : \dfrac{c}{2}$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டும். அதாவது $a : b+c$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டும். எனவே, முன்கூறிய G என்ற புள்ளி $\angle G_1\,ED$-ன் இரு சம வெட்டியின் மேலிருக்கும். ஆனுல், இவ்வாறு பெறப் படும் G என்பது $\Delta\ DEF$-ன் இரு கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகள் சந்திக்குமிடமாலால், G என்பது $\triangle DEF$-ன் உள் வட்ட மையமாகும். எனவே, AB; BC, CA என்ற கம்பி களாலாய முக்கோணத்தின் பு. மையம் $\triangle DEF$-ன் உள்வட்ட மையம் எனப் பெறப்படுகிறது.

10-2.3.6. ஒரு சீரான நான்முகி (Tetrahedron)

(படம் 10–2.3.6)-ல் $ABCD$ ஒரு நான்முகத்திண்மம். CD-ன் மையம் E எனக் கொண்டு, BE என்ற கோட்டினை வரைக. BCD என்ற முகத்தின் பு. மையம் H எனக் கொள்க.



படம் 10-2.3.6.

அப்போது $BH : HE = 2 : 1$

BCD-க்கு இணையான தளங்களால், இந் நான்முகத் திண்மத்தை மெல்லிய முக்கோணத் தகடுகளாகப் பிரிக்கவும். அவ்வகைத் தகடொன்று bcd எனக் கொள்க. bcd என்ற தளம் AHஐயும் AEஐயும் முறையே h, e–ல் வெட்டப்படும். cd–க்கு இணையாக உள்ள CD-ன் மையம் E ஆகையால் $ce = ed$, அதாவது be என்பது Δbcd–ன் ஒரு மையக் கோடாகிறது.

ABE என்ற தளத்தின் மேல் கோடுகள் be, BE, AH மூன்றும் உள்ளன; எனவே h-ம் be-ன் மேல்தான் இருக்கும்.

bh–ம், BH–ம் இணை கோடுகளாதலால், $\triangle Abh$-ம் $\triangle ABH$-ம் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்.

$$\therefore \quad \frac{hA}{HA} = \frac{bh}{BH} = \frac{bh}{2\,HE} \text{ (ஏனெனில், } BH : HE = 2 \cdot 1)$$

$$\frac{bh}{hA} = \frac{2\,HE}{HA}$$

$$= \frac{2\,he}{hA}$$

$\therefore$ $bh = 2\,he$; அதாவது h என்பது $\triangle bcd$-ன் பு. மைய மாகிறது.

எனவே, BCD-ன் இணையான தளங்களில் நாம் வெட்டிப் பெற்ற முக்கோணத் தகடுகளின் புவிஈர்ப்பு மையங்கள் யாவும் AH-ன் மேல் இருக்கும்; எனவே, அந் நான்முகியின் பு. மையம் AH-ன் மேல் இருக்கும் என்பது உறுதியாகிறது.

அவ்வாறே, ACD என்ற முகத்தின் பு. மையம் F ஆனல், நான்முகியின் பு. மையம் BF-ன் மேல் உள்ளதும் உறுதியாகிறது.

AE என்பது ACD என்ற முக்கோணத்தின் ஒரு சம வெட்டியாதலால், F என்பது AE-ன் மேல் உள்ளது.

எனவே AH-ம் BF-ம் ஒரு தளத்தமையும் கோடுகளாகின்றன. ஆகவே AH-ம், BE-ம் கட்டாயம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். அப் புள்ளி G எனக் கொண்டால், G என்பதே நான்முகியின் பு. மையமாகிறது.

HF என்ற கோட்டை வரைந்தால், $HF \parallel AB$.

ஏனெனில், $\dfrac{EA}{EF} = \dfrac{EB}{EH} = \dfrac{3}{1}$

$$\therefore \quad \frac{AB}{HF} = \frac{EB}{EH} = \frac{3}{1}$$

மேலும் $\triangle AGB$-ம் $\triangle HGF$-ம் வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலின்,

$$\frac{AG}{HG} = \frac{AB}{HF} = \frac{3}{1} \text{ (முன் நிறுவப்பட்டது)}$$

$$\therefore \quad \frac{AG}{HG} + 1 = \frac{4}{1}$$

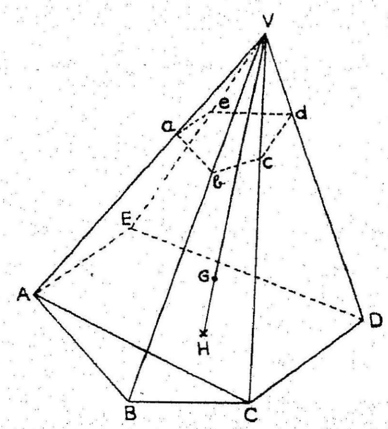
$$\frac{AH}{HG} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ AH என்ற கோட்டை, G என்பது $3:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

எனவே, ஒரு நான்முகியின் பு. மையம் உள்ள இடம் பின் கூறப்படும் தேற்றத்தால் பெறப்படும்.

தேற்றம்: ஒரு நான்முகியின் ஓர் உச்சியுடன் அதற்கெதிர்ப் புறமுள்ள முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை இணைக்கும் கோட்டின் மேல், அக் கோட்டை 3 : 1 என்று பிரிக்கும் புள்ளியில் அந் நான்முகியின் பு. மையம் இருக்கிறது.

10-2.3.7. **ஒரு சீரான பட்டைக் கூம்புத் திண்மம்; அடித் தளம் தட்டையானது** (A uniform solid pyramid on any plane base)



படம் 10-2.3.7.

(படம் 10-2.3.7.)-ல் *ABCDE* என்ற தட்டையான அடித் தளமும், *V* என்ற உச்சியும் கொண்ட ஒரு சீரான பட்டைக் கூம்பு காட்டப்பட்டிருக்கிறது. *ABCDE*–ன் பு. மையம் *H*–ம், உச்சி *V*–ம் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

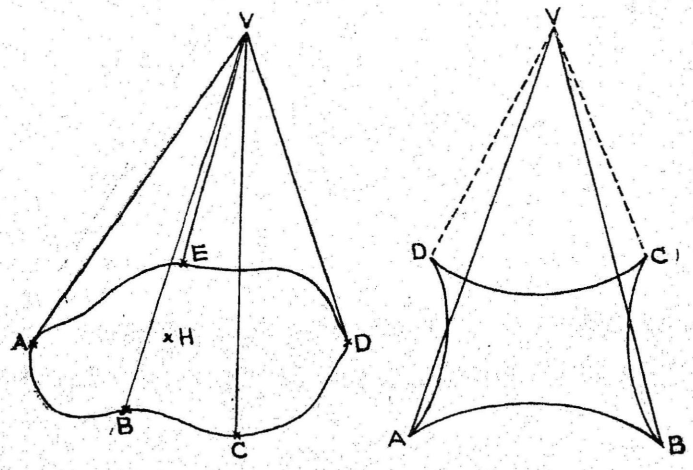
அடித் தளத்திற்கு இணையான தளங்களால் இப் பட்டைக் கூம்பினை மெல்லிய தகடுகளாகப் பிரித்துக் கொள்க. அப்படிப் பட்ட ஒருதகடு *a b c d e*. *a b c d e*–ம் *ABCDE*–ம் வடிவொத்த நிலைகளில் உள்ள வடிவொத்த உருவங்களாதலால், *a b c d e*–ன் பு. மையம் *VH*–ன் மேல் *h* என்ற புள்ளியில் *a b c d e* என்ற தளத்திலிருக்கும். இது மற்ற எல்லாத் தகடுகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே, இப்பட்டைக் கூம்பின் பு. மையம் *VH*–ன் மேலிருக்கும்.

ABCDE-ஐ *ABC*, *ABD*, *BCD* ... என்ற முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கவும்.

ABCஐ அடித் தளமாகக் கொண்டு, Vஐ உச்சியாகக் கொண்ட $ABCV$ என்ற நான்முகியை எடுத்துக் கொள்க. $ABCV$ என்ற நான்முகியில் Vஐயும், ABC–ன் பு. மையம் H_1ஐயும் இணைத்து VH_1ஐ 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் G_1-ல் பிரித்தால் அந்நான்முகியின் பு. மையம் G_1-ல், அதாவது அடித்தளத்திலிருந்து $\frac{1}{4}$ VH_1 என்ற தூரத்தில் இருக்கும்—அதாவது $H_1 G_1 = \frac{1}{4} VH_1$. இது மற்ற நான்முகிகளுக்கும் பொருந்தும்.

எனவே, பட்டைக் கூம்பின் பு. மையம் VH-ன் மேல், அடித்தளத்திலிருந்து $\frac{1}{4}$ VH தூரத்திலிருக்கும்.

10-2.3.8. ஒரு கூம்புத் திண்மம் (அடித்தளம் தட்டை, ஆனால் எந்த உருவமும் தாங்கலாம்)



படம் 10-2.3.8

(படம் 10–2.3.8 காண்க.)

ஒரு பட்டைக் கூம்பின் அடித்தளப் பக்கங்களை எண்ணற்றவைகளாக ஆக்கினால், எந்தவிதமான கூம்புத் திண்மமும் பெறலாம். என்வே அடித் தளத்தின் பு. மையம் H எனவும் உச்சி V எனவும் கொண்டால், கூம்புத் திண்மத்தின் பு. மையம் VH–ன் மேல் $VG : GH = 3 : 1$ என்பதற்குப் பொருத்தமான G என்ற புள்ளியிலிருக்கும். அதாவது $HG = \frac{1}{4} VH$ எனவிருக்கும்.

கூம்பின் அடித்தளம் ஒரு சரியான வட்டமாகவும், V என்பது வட்ட மையத்திற்கு உயர, குத்துக் கோட்டில் இருப்

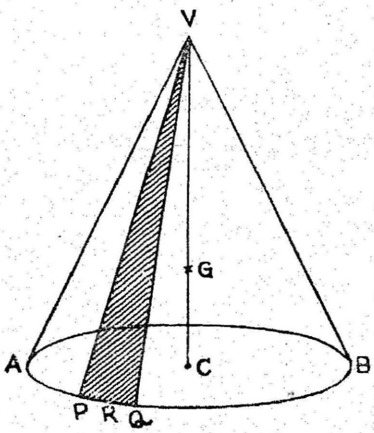
பின், அக்கூம்பு ஒரு சீரான வட்டதளக் கூம்பாகும். VH என்பது உச்சியையும் வட்ட மையம் Hஐயும் சேர்க்கும் கோடாகும். VH-ன் மேல் $HG = \frac{1}{4} VH$ என்ற வகையில் பொருந்தக்கூடிய G என்பதே, இவ் வட்ட தளக் கூம்பின் பு. மையமாகும்.

இது ஒரு பொள்ளலான (hollow) வட்டதளக்கூம்பிற்குப் பொருந்தாது.

அவ்வித பொள்ளலான வட்டதளக் கூம்பிற்குப் பு. மையம் காண்பது பின் வருமாறு.

10-2.3.9. **வட்ட தளமுள்ள ஒரு சீரான சரியான மெல்லிய பொள்ளற்கூம்பு** (A uniform thin hollow right - circular cone)

AB என்ற வட்டதளம், மையம் C, கொண்ட ஒரு பொள்ளற் கூம்பு (படம் 10-2.3.9)-ல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. V அதன் உச்சி. அதன் சாய்வுயரம் h எனக் கொள்க. குத்துயரம் $VC = H$ எனக்கொள்க.



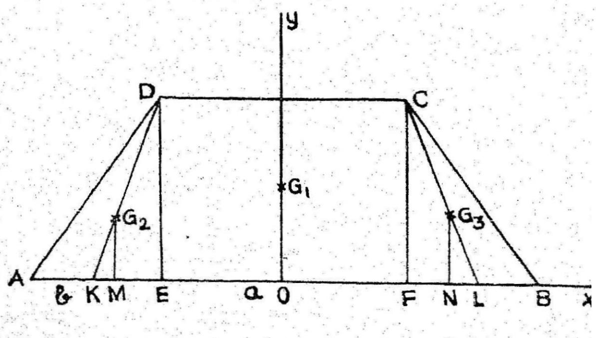
படம் 10-2.3.9

அக் கூம்பின் வட்ட வரம்பில் PQ என்று இரு மிக நெருக்கமான புள்ளிகளை எடுத்து PV, QV என்று இணைத்துவிடுக. PQV ஒரு சிறிய முக்கோணமாகக் கொள்ளலாம். (எல்லை $P \to Q$ வில் PQ = நாண் PQ). இம் முக்கோணத் தகட்டின் பு. மையம் PQ-ன் மையம் R ஐயும் Vஐயும் இணைத்து $RG_1 = \frac{1}{3} RV$ எனப்

பொருந்தும் வகையில் G_1-ல் இருக்கும். (படத்தில் காட்டப்படவில்லை); அதாவது கூம்பின் சாய் வுயரத்தில், அடித்தளத்திலிருந்து $\frac{h}{3}$ தூரத்திலிருக்கும்.

இக் கூம்பின் மேற்பரப்பை, இவ்வாறு, சிறுசிறு முக்கோணத் தகடுகளாகப் பிரித்தால், அவற்றின் பு. மைய நிலைகள் யாவற்றிற்கும் மேற்கூறியது பொருந்தும். எல்லா பு. மையங்களும் வட்ட வரம்பின் புள்ளிகளோடு Vஐ இணைத்தால் பெறப்படும் சாய் வுயரங்களின் மேல் $\frac{h}{3}$ உயரத்தில் கூம்பின் பரப்பின் மேல் எண்ணற்ற புள்ளிகளாகவிருக்கும். எனவே, இப் புள்ளிகள் யாவும்,அடித்தள வட்டத்திற்கு மேல் சாய் வுயரம் $\frac{h}{3}$ தூரத்தில் உள்ள ஒரு வட்ட வரம்பில் இருக்குமென நாம் யூகித்துக் காண முடியும். ஆனால், கூம்பின் சீரச்சான VC-ன் மேல் இப்பொள்ளற் கூம்பின் பு. மையம் இருக்குமெனவும் நாம் யூகிக்கலாம். எனவே, தளமட்டத்திற்கு மேல், கூம்பின் குவியப் பகுதியில், VC என்ற கோட்டின் மேல் $CG = \frac{1}{3} H$ என்பதற்குப் பொருந்த G-ல் புவி மையமிருக்கும்.

10-3. **ஒரு சீரான சரிவகப் பரப்பு** (A uniform trapezoidal area)



படம் 10-3.

படம் $ABCD$ ஒரு சரிவகம். $CD = a$; $AB = AE + EF + FB = b + a + c$; உயரம் $ED = h$, இதைமூன்று பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம்:

முக்கோணம் AED; பரப்பு $\frac{1}{2}\ bh$

செவ்வகம் $EFCD$; பரப்பு ah

முக்கோணம் FBC; பரப்பு $\frac{1}{2}\ ch$

மொத்தப்பரப்பு $\frac{1}{2}h\,(2a+b+c) = \frac{1}{2}h\ (a+b+c+a)$ எடை காண வேண்டுமாயின், பரப்படர்த்தி ρ எனக் கொள்ள லாம். EF-ன் மையம் O எனக் கொண்டு, OX, OY எனச் செங்குத்தச்சுகள் எடுத்துக்கொள்வோம்.

OX, OY என்றஅச்சுக்களை யொட்டி இம்மூன்று பரப்புக் களின் பு. மையங்களைக் காண்போம். செவ்வகம் $EFCD$-ன் புவி மையம் $x = 0$, $y = \dfrac{h}{2}$ எனத்தெரிகிறது. இதை G_1 எனக் குறிப்பிடுக.

$\triangle\ ADE$-ன் பு. மையம் G_2 இல் இருக்குமானால், $G_2M \perp AB$ என வரைந்து கொள்க. $G_2M \parallel ED$ ஆக இருப்பதால், $\triangle\ KG_2M$-ம் $\triangle\ KDE$-ம் வடிவொத்தவை.

$$\frac{KM}{KE} = \frac{MG_2}{ED} = \frac{KG_2}{KD} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ KM = \frac{1}{3}\ KE = \frac{1}{3}\ \frac{b}{2}$$

$$MG_2 = \tfrac{1}{3}\ ED = \tfrac{1}{3}\ h$$

எனவே, $OM = OE + EM = OE + EK - KM$

$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{b}{6}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$$

இவ்வாறே G_3 என்பது $\triangle\ FBC$-ன் பு. மையமானால், G_3 விருந்து $G_3N \perp AB$ வரைந்தால்,

$$NL = \frac{1}{3}\ \frac{c}{2}$$

$$\therefore\ FN = FL - NL$$

$$= \frac{c}{2} - \frac{c}{6} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore\ ON = OF + FN = \frac{a}{2} + \frac{c}{3}$$

மேலும் $NG_3 = \frac{1}{3}\ h$

இப்போது ஓர் அட்டவணையாக மூன்று பகுதிகளின் பு. மையங்களது x, y ஆயத்தொலைகளைக் குறிப்போம்:

பரப்பு	எடை	x ஆயத்தொலை	y ஆயத்தொலை
$EFCD$	$a\ h\ \rho$	O	$\frac{h}{2}$
$\triangle\ AED$	$\frac{1}{2}\ b\ h\ \rho$	$OM = -\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)$	$\frac{h}{3}$
$\triangle\ FBC$	$\frac{1}{2}\ c\ h\ \rho$	$ON = \frac{a}{2} + \frac{c}{3}$	$\frac{h}{3}$

எனவே $\bar{x} = \frac{\sum \omega_1\ x_1}{\sum \omega_1}$, $\bar{y} = \frac{\sum \omega_1 y_1}{\sum \omega_1}$ என்றதொடர்புகளைப் பயன்படுத்தினல், சரிவகத்தின்

$$\bar{x} = \frac{a\ h\ \rho\ \times 0 + \frac{1}{2}\ b\ h\ \rho\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right) + \frac{1}{2}\ c\ h\ \rho\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{3}\right)}{\frac{1}{2}\ h\ \rho\ (2a + b + c)}$$

$$= \frac{(3a + 2b + 2c)(c-b)}{6\ (2a + b + c)}$$ என வரும்.

குறிப்பு: $c = b$ ஆனல், அதாவது சமபக்க சரிவகமானுல் $\bar{x} = 0$ ஆகும்.

$$\bar{y} = \frac{a\ h\ \rho\ \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\ b\ h\ \rho\ \frac{h}{3} + \frac{1}{2}\ c\ h\ \rho\ \frac{h}{3}}{\frac{1}{2}\ (2a + b + c)\ h\rho}$$

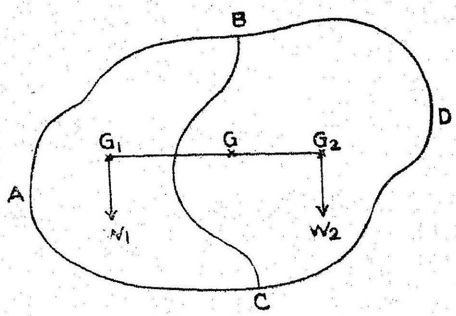
$$= \frac{h\ (3+ab+c)}{3\ (2a+b+c)}$$

குறிப்பு: $b = c$ ஆனல் $\bar{y} = \frac{h\ (3a + 2b)}{6\ (a + b)}$

$a = b = c$ ஆனல் $\bar{y} = \frac{5\ h\ a}{12\ a} = \frac{5\ h}{12}$

$\bar{x} = O$.

10-4. இருபகுதிகளாலாய ஒரு பொருளின் பு. மையம் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின், இரு பகுதிகளின் தனித் தனி பு. மையப் புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால், முழுப்பொருளின் பு. மையம் காணல்.



படம் 10-4.

ABC, *BDC* என்ற இரு பகுதிகளாலாய ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் *ABCD* கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. பகுதி *ABC*-ன் எடை W_1 ; பு. மையம் G_1; பகுதி *BDC*-ன் எடை W_2; பு. மையம் G_2 எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. *ABCD*-ன் எடை $W_1 + W_2$; அதன் பு. மையம் காணவேண்டும்.

$G_1 G_2$ ஐ இணைக்கவும்.

G_1-ல் செயற்படும் W_1, G_2-ல் செயற்படும் W_2 என்ற விசைகள் செங்குத்தான கீழ்க்கோடுகளில் இணைத்திசைகளில் செயற்படும். இவற்றின் (கூட்டு) விளைவு விசை (எடை $= W_1 + W_2$) செயற்படும் இடம் G எனக் கொள்க.

அப்போது $W_1 \cdot G_1 G = W_2 \cdot G_2 G$

$$\therefore \quad \frac{G_1 G}{G_2 G} = \frac{W_2}{W_1}$$

என்ற சமன்பாடு வரும். எனவே, முழுப்பொருளின் பு. மையம் $G_1 G_2$ என்ற கோட்டை உட்புறமாக $W_2 : W_1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

10-4.1. ஒரு பொருளில் ஒரு பகுதி நீக்கப்பட்ட பின்பு, எஞ்சியிருக்கும் பொருளின் பு. மையம்

(படம். 10-4.) ஐயே வைத்துக் கொள்ளலாம். *ABDC* என்ற முழுப் பொருளின் பு. மையம் G எனவும், அதன் முழு எடை W எனவும் கொள்க.

ABC என்ற பகுதியின் பு. மையம் G_1 எனவும், அதன் எடை W_1 எனவும் கொள்க.

எஞ்சிய பகுதி BDC-ன் பு. மையம் காணவேண்டும். அதன் எடை $(W-W_1)$ எனத் தெரிகிறது. நாம் காண வேண்டிய பு. மையம் $G_1 G$-ன் நீட்டலில் இருக்கும். அது இருக்குமிடம் G_2 எனக் கொண்டால் G_2-ன் இடங்குறிக்க வேண்டும். முன் கண்ட முடிவுப்படி,

$$W_1 \cdot G_1 G = (W-W_1)\, G G_2$$

$$\therefore \quad \frac{G_1 G}{G G_2} = \frac{W-W_1}{W_1}$$

$$\frac{G_1 G + G G_2}{G_2 G} = \frac{W-W_1+W_1}{W_1}$$

$$\therefore \quad \frac{G_1 G_2}{G_2 G} = \frac{W}{W_1}$$

அதாவது $G_1 G$ என்ற நீளத்தை வெளிப்புறம் $W : W_1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியில் எஞ்சிய பொருளின் பு. மையமிருக்கும்.

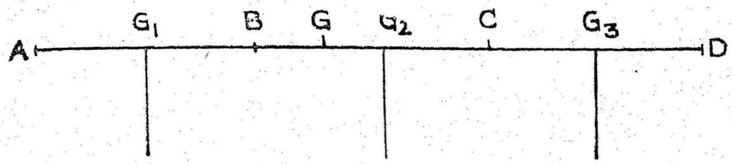
10–4.2. கணக்குகள் செய்யும் முறைகளில் பின் கொடுக்கப்படும் குறிப்புகள் பயன்படும் :

1. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களின் இணைப்புப் பொருளின் பு. மை G என்ற ஒரு புள்ளியில் உள்ளது எனக் கொண்டு இணைப்புப் பொருளின் மொத்த எடை (என்ற விசைக்கு)க்கு ஏதாவதொரு புள்ளியையொட்டி திருப்புத்திறன் கண்டு, அதே புள்ளியை யொட்டி, பகுதிகளின் இயற் கூட்டுத் திருப்புத்திறன் கண்டு, இரண்டையும் சமமெனக் கொண்டு பார்த்தால் G இருக்கும் இடம் பெறலாம்.

இதுவே $\bar{x} = \dfrac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots\ldots \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots + \omega_n}$ என்ற வாய்பாட்டின் பொருளாகும்.

2. ஒரு பொருள் தன்னிச்சையாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும்போது, தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் புள்ளி வழியாகக் கீழ்க்குத்துக்கோடு வரைந்தால், பு. மையம் அக் குத்துக் கோட்டின் மேலிருக்கும்.

10–5. **எடுத்துக்காட்டு 1:** ஒரு தொலை நோக்கி ஒன்றுக்குள் ஒன்றான மூன்று குழாய்களாலானது. ஒவ்வொன்றும் 25 செ.மீ. நீளம்; அவற்றின் எடைகள் முறையே 240 கிராம்; 210 கிராம்; 180 கிராம்; எல்லாக் குழாய்களையும் முழு நீளம் இழுத்திருக்கும் நிலையில் அதன் பு. மையம் எங்குள்ளதெனக் காண்க.



படம் 10-5.1.

10–4.2.–ல் குறிப்பு (1) ஐப் பயன்படுத்துவோம். முழு தொலை நோக்கியின் பு. மையம் *G* என்ற புள்ளியின் *A* என்ற முனையிலிருந்து *x* தூரத்தில் உள்ளதெனக் கொள்வோம். மொத்த எடை 630 கிராம்.

*A*ஐ ஒட்டி அதன் திருப்புத்திறன் $= 630 \times x$ கி. செ.மீ.

*A*ஐ ஒட்டி 240 கிராம் எடையின் திருப்புத்திறன்

$$= 240 \times 12.5 = 3000 \text{ கி. செ.மீ.}$$

210 கிராம் எடையின் தி. தி. $= 210 \times 37.5$

$$= 7875 \text{ கி. செ.மீ.}$$

180 கிராம் எடையின் தி. தி. $= 180 \times 62.5$

$$= 11250 \text{ கி. செ.மீ.}$$

$$\therefore\ 630\,x = 3000 + 7875 + 11250$$

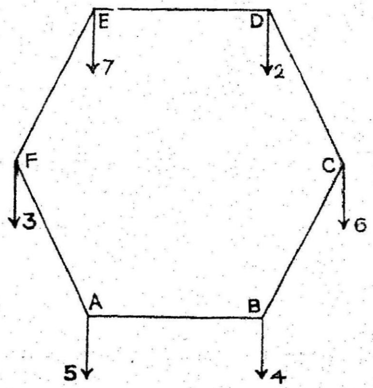
$$= 22125$$

$$x = \frac{22125}{630} = 35.12 \text{ செ.மீ. (ஏறக்குறைய)}$$

எனவே, *A* என்ற முறையிலிருந்து பு. மையம் 35·12 செ.மீ. தூரத்திலுள்ளது; அல்லது மையத்திலிருந்து 2·38 செ.மீ. தூரம்.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் உச்சிகளில் முறையே 5, 4, 6, 2, 7, 3 கி. கிராம் எடைகள் உள்ளன. அவற்றின் பு. மையம் அறுகோணத்தின் மையத்தி லுள்ளதென நிறுவுக

(படம் 10-5·2.)–ல் Aஐ ஆய ஆதியாகக் கொண்டு AB, AE என்பவற்றினை முறையே x, y அச்சுகளாகக் கொண்டு, விசைகள் (எடைகள்) செயற்படும் புள்ளிகளின் x, y ஆயத் தொலைகளை எழுதுவோம். அறுகோணப் பக்கம் a எனக் கொள்க.



படம் 10-5.2

முனை	விசை (எடை)	x ஆயத் தொலை	y ஆயத் தொலை
A	5	0	0
B	4	a	0
C	6	$3\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D	2	a	$a\sqrt{3}$
E	7	0	$a\sqrt{3}$
F	3	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

எனவே வாய்பாட்டின் படி

$$\bar{x} = \frac{5.0 + 4.a + 6.\frac{3}{2}a + 2a + 7.0 - 3\frac{a}{2}}{27}$$

$$= \frac{27a}{2 \times 27} = \frac{a}{2}$$

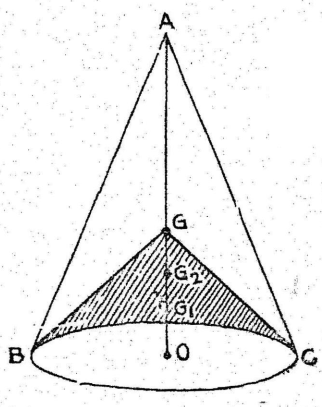
$$\bar{y} = \frac{5.0 + 4.0 + 6.a\frac{\sqrt{3}}{2} + 2a\sqrt{3} + 7a\sqrt{3} + 3a\frac{\sqrt{3}}{2}}{27}$$

$$= \frac{\frac{27}{2}\sqrt{3}.a}{27}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.a}{2}$$

$\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}.a}{2}\right)$ என்ற இடத்தில் பு. மையம் உள்ளது. இது அறு கோணத்தின் மையமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு சரியான வட்டதள கூம்புத் திண்மத்தில் உள் பாகம் குடைந்தெடுக்கப் பட்டு, அக் குழிவுப் பகுதி ஒரு கூம்பாக அமைகிறது. இக் குழிவுப் பகுதியின் முனை,



படம் 10-53.

இப்போதுள்ள குழிவுள்ள திண்மத்தில் பு. மையமாக இருக்க வேண்டுமாயின், எவ்வளவு உயரத்திற்குக் குடைந்தெடுக்க வேண்டும் ?

(படம் 10-5.3)-ல் குடைந்தெடுக்கப்பட்ட பகுதி BGC (கோடிட்டுக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.) $AO = h$ எனக் கொள்வோம். $ABGC$ என்ற திண்மத்தின் பு. மையம் G–ல் இருப்பின், GO–ன் அளவென்ன வென்று காணவேண்டும். $OG = x$ எனவும், கூம்பின் அடித்தள வட்ட ஆரம் r எனவும் ஏற்போம்.

அடர்த்தி ρ ஆனுல் பெருங் கூம்பு ABC-ன் எடை = $\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$.

குடைந் தெடுக்கப்பட்ட பகுதி BGC-ன் எடை $= \frac{1}{3}\pi r^2 x\rho$ எஞ்சியுள்ள திண்மத்தின் எடை $= \frac{1}{3}\pi r^2 \rho (h - x)$.

ABC என்ற கூம்பின் பு. மையம் G_2 எனவும், BGC என்ற கூம்பின் பு. மையம் G_1 எனவும் கொண்டால்,

$$OG_1 = \frac{x}{4};\quad OG_2 = \frac{h}{4}.$$

தேற்றம் ... 10-4.-ன் படி

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \rho (h - x)\, G G_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 x \rho\, G_1 G_2$$

$$\therefore (h - x)\left(x - \frac{h}{4}\right) = x\left(\frac{h}{4} - \frac{x}{4}\right)$$

இதைச் சுருக்கி எழுதினுல்

$\frac{3x^2}{4} - hx + \frac{h^2}{4} = 0$ என்ற சமன் பாடு வரும்.

$$\therefore 3x^2 - 4hx + h^2 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 12h^2}}{6}$$

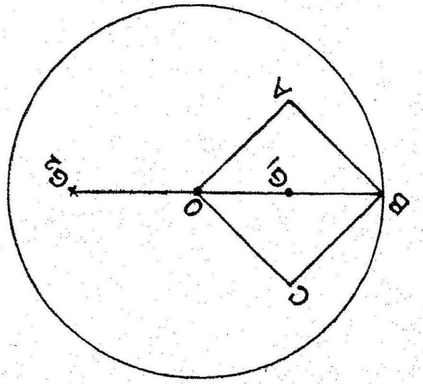
$$= \frac{4h \pm 2h}{6} = \frac{h}{3} \text{ or } h$$

h என்பது பொருந்தாது; ஏனெனில், கூம்பு முழுவதையும் குடைந்தெடுத்தால் ஒன்றும் எஞ்சியிராது.

எனவே அடியிலிருந்து $\frac{h}{3}$ உயரத்திற்குக் குடைந்தால், நமக்குக் கொடுக்கப்பட் கட்டுப்பாடு பொருந்தும்.

எடுத்துக் காட்டு 4 : ஆரம் a உள்ள ஒரு வட்டத் தகட்டிலிருந்து, ஓர் ஆரத்தைத் தனது மூலை விட்டமாகக் கொண்ட

ஒரு சதுரம் வெட்டி யெடுக்கப்பட்ட பின்பு, எஞ்சியிருக்கும் தகட்டின் பு. மையம், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{a}{4\pi - 2}$ தூரத்தி லிருக்கிற தென நிறுவுக.



படம் 10-5.4

படம் 10–5.4--ல் $OABC$ என்ற சதுரம் வெட்டி எடுக்கப்படு கிறது.

$OB = a$; எனவே, G_1 என்பது சதுரத்தின் பு. மையமானால் $OG_1 = \frac{a}{2}$; $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

O என்பது வட்டத்தின் பு. மையம். எஞ்சிய தகட்டின் பு. மையம் G_2 எனவும் $OG_2 = x$ எனவும் கொள்க. வட்டத்தின் எடை $= \pi a^2 \rho$ (ρ — அடர்த்தி)

சதுரத்தின் எடை $= \frac{a^2}{2} \rho$

எஞ்சிய எடை $= a^2 \rho \left(\pi - \frac{1}{2}\right)$

10-4.-தேற்றப்படி, $\frac{a^2}{2} \rho . \frac{a}{2} = a^2 \rho \left(\pi - \frac{1}{2}\right) x$

$$\frac{a}{4} = \left(\frac{2\pi - 1}{2}\right) x$$

$$x = \frac{2a}{8\pi - 4}$$

$$= \frac{a}{4\pi - 2}$$

எனவே, எஞ்சிய பகுதியின் பு. மையம், வட்ட மையத்திலி லிருந்து $\frac{a}{4\pi - 2}$ தூரத்திலுள்ளது.

10-6. கட்டிறுக்கப் பொருளின் அசைவற்ற நிலை :

ஒரு புத்தகத்தை ஒருவழவழப்பான மேசையின் நடுவில் வைத்தால் அது அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. ஏன்? (உராய்வு விசை ஏதுமில்லையெனக் கொள்க.)

அப் புத்தகத்தின் பு. மையம் G வழியாக அதன் முழு எடை W செயற்படுகிறது.

அப் புத்தகம் மேசையின் மேலிருப்பதால், அப் புத்தகம் மேசையைத் தொடும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் மேசைக் குத்துக் கோடுகளில் ஒவ்வோர் எதிர்வினை (விசை) (Reaction) செயற் படும். அவை யாவும் இணை திசைகளில் செயற்படுவதால், அவை யாவற்றிற்கும் (கூட்டு) விளைவு விசையாக ஓர் எதிர் விசை மேலே, மேசைக்குக் குத்துக்கோடு ஒன்றில் செயற்படும்.

அப் புத்தகம் அசைவற்ற நிலையிலிருப்பதால், கீழ்த் திசையில் குத்துக் கோட்டில் செயற்படும் W என்ற எடையும், மேசையின் எதிர்வினை (விசை)களின் (கூட்டு) விளைவு விசையும் நேரெதிர்த் திசைகளில் ஒரு புள்ளியில் மேல் திசையில் செயற் பட வேண்டும். எடையும் எதிர்வினைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசையும் ஒன்றுக்கொன்று எதிரீடு செய்து கொண்டு அப் புத்த கத்தை அசைவற்ற நிலையில் இருக்கச் செய்கின்றன. எனவே, அசைவற்ற நிலையில் அப் புத்தகமிருக்க வேண்டுமாயின், G வழி யாக உள்ள குத்துக் கோடு, புத்தகம் மேசையைத் தொடும் பரப் பிற்குள்ளேயே சந்திக்க வேண்டும்; ஏனெனில், புத்தகம் மேசையைத் தொடும் பரப்பில் ஏதாவதொரு புள்ளியில்தான் மேசையின் எதிர் வினைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செயற்பட முடியும்.

இப்போது அப் புத்தகத்தைச் சிறிது சிறிதாக மேசையின் மேல் நகர்த்திக் கொண்டே வந்தால், மேசையின் ஓரத்தைத் தாண்டிய ஒரு நிலையில் அது விழுந் தருவாயிலுள்ளது. இன்னும் சற்றுத் தள்ளினால், அது விழுந்து விடுகிறது. காரணம் என்ன?

விழுகின்ற தருணம் நெருங்கும் போது புத்தகத்தின் பு. மையம் மேசையின் ஓரத்தில் வருகிறது. மேசையின் (கூட்டு) விளைவு எதிர்வினை செயற்படும் புள்ளியும் மேசையின் ஓரத்திற்கு வந்து கொண்டே யிருக்கிறது. புத்தகத்தின் பு. மையம் G, மேசை வரம்பிலுள்ள போது, மேசையின் (கூட்டு) விளைவு எதிர்வினையும் மேசை வரம்பிற்கு வந்து, எடையும் எதிர்வினையும் எதிரீடு செய்து கொண்டு, புத்தகம் விழப் போகும் தருவாய்க்கு மிக அண்மையில் அசைவற்ற நிலை யிலிருக்கிறது.

இன்னும் புத்தகத்தைச் சிறிது தள்ளி விட்டால், G மேசை விளிம்பிற்கு வெளியே வந்து விடுகிறது. மேசையின் எதிர்வினை புத்தகம் மேசையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் பரப்பை விட்டு வெளியே செயற்பட முடியாதாகையின், W-ம் எதிர் வினையும் ஒரே கோட்டில், நேரெதிர்த் திசைகளில் செயற்பட முடியாத நிலை உருவாகி, புத்தகம் மேசை வரம்பை யொட்டிச் சுழன்று கீழே விழ ஏதுவாகிறது. எனவே G–லிருந்து வரையப் படும் குத்துக் கோடு புத்தகத்திற்கும் மேசைக்கும் பொதுவான பரப்பினுள் மேசையைச் சந்திக்கும் வரை புத்தகம் கவிழாது; அக் குத்துக் கோடு மேசை வரம்பைத் தொடும்போது, புத்தகம் விழும் தருவாயில் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது; அக் குத்துக் கோடு மேசை வரம்பைத் தாண்டியவுடனேயே புத்தகம் விழுந்து விடும்.

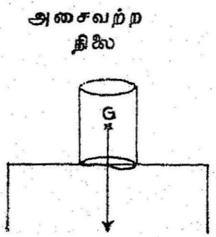
புத்தகத்திற்குப் பதிலாக எந்த அடித் தளமுள்ள ஒரு பொருளுக்கும் இது பொதுவாப் பொருந்தும். எனவே **''ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒரு வழவழப்பான கிடைத் தளத்தின் மேல் நிற்கும்போது, அப் பொருளின் பு. மையம் வழியாக வரையப்படும் குத்துக் கோடு, பொருளுக்கும் அதைத் தாங்கும் கிடைத் தளத்திற்கும் பொதுவான பரப்பினுள் ளேயே அக் கிடைத் தளத்தைச் சந்திக்குமானால், அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும். அக் கோடு, கிடைத்தளப் பொதுப் பரப்பின் விளிம்பில் கிடைத் தளத்தைச் சந்திக்குமானால் அசைவற்ற நிலை மாறும் தருணமாகும்.**

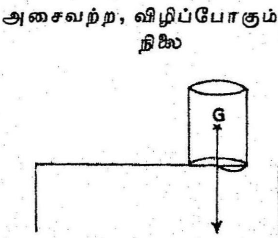
அக் கோடு கிடைத்தளப் பொதுப் பரப்பின் விளிம்பைத் தாண்டிய உடனே, பொருள் சுழன்று விழுந்து விடும்.''

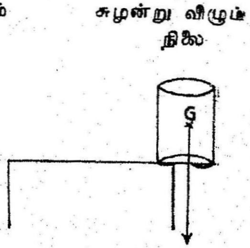
அப் பொருள் ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மேல் நிற்கும் போதும் இது பொருந்தும்.

["உராய்வு" — எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு 9-5.(5) காண்க]

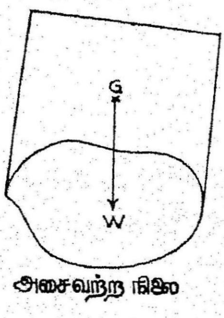
பின் வரும் படங்கள் மேற் கூறியவற்றை விளக்கும்.

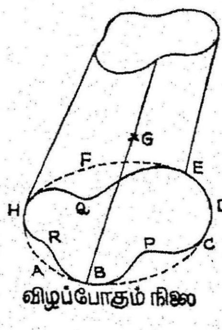


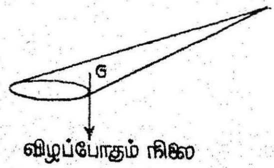




படம் 10-6. (1). படம் 10-6. (2). படம் 10-6. (3).







படம் 10-6. (4). படம் 10-6. (5). படம் 10-6.(6)

[படம் 10-6. (5).] இப் படத்தில் அடித் தளம் *ABPCDEQHRA* என்ற வகையில் சில இடங்களில் உள்ளே குவிந்து, சில இடங்களில் வெளியே விரிந்துள்ள ஒரு பொருள் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது ஓர் இறுக்கமான கயிறு கொண்டு அடித் தளத்தைச் சுற்றினால் விட்டு விட்டுக் கோடு களால் வரையப்பட்ட ஒரு பரப்பு *ABCDEFHA* வரும். அந்த விட்டு விட்டுக் கோடிட்ட பரப்பினுள் பு. மையத்திலிருந்து அடித் தளத்திற்கு வரையப்படும் கோடு அடித் தளத்தைச் சந்தித்தாலே, பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும். அக் கோடு பொருளின் அடித் தளத்தினுள்ளேயே அடித்

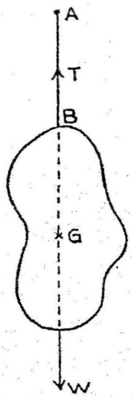
தளத்தைச் சந்திக்க வேண்டுமென்ற கட்டுப்பாடு தேவையில்லை.

10-7. சுயேச்சையாக ஒரு பொருளைத் தொங்க விட்டால் அப் பொருளின் அசைவற்ற நிலை :

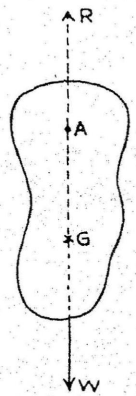
பின்வரும் உண்மை விளங்கும்.

ஒரு புள்ளியிலிருந்தோ அல்லது ஒரு கயிறு கொண்டோ ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியை மையங் கொண்டு அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் போது அப் பொருளின் பு. மையம் வழியாக வரையப்படும் குத்துக் கோடு அக் குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்லும்.

[படம் 10-7.(1)]-ல் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் *A* என்ற புள்ளியிலிருந்து *AB* என்ற கயிறு கொண்டு தொங்கவிடப் பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்க. பொருள் அசைவற்ற நிலையில்



படம் 10-7. (1).



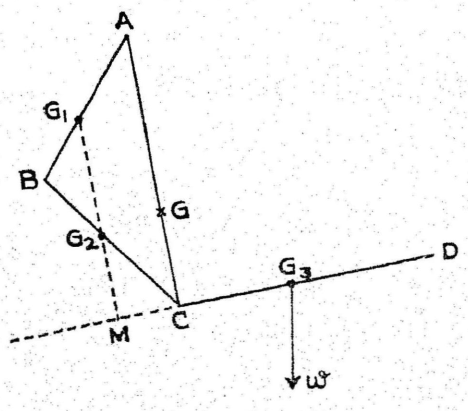
படம் 10-7. (2).

ஆடாது அசையாது நிற்கிறது. அப்போது *G* என்ற பு.மையம் வழியாக *W* என்ற அப் பொருளின் எடை செயற்படுகிறது. செயற்படும் திசை *G*-ன் வழியாகக் கீழே குத்துக் கோட்டில் உள்ளது. கயிற்றில் *T* என்ற இழு விசை செயற்படுவதாலும், அசைவற்ற நிலை உள்ளதாலும் *T*-ம், *W*-ம் சமமான விசைகளாய் நேரெதிர்த் திசைகளில் ஒரே புள்ளி வழியாகச் செற்பட வேண்டும். *G* வழியாக *W* கீழ்க் குத்துக் கோட்டில் செயற்படுவதால், *T*-ம் *G* வழியாக மேல் குத்துக்கோட்டில் செயற்

படும் எனவே, G வழியாக வரையப்படும் கீழ்க் குத்துக் கோட்டின் நீட்டலில் A இருக்கும் என நிறுவப்படுகிறது.

அவ்வாறே [படம் 10-7. (2)]-ல், கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளியான A-லிருந்து அப் பொருள் தொங்க விடப்பட்டால் (அப்போது Aஐ மையங் கொண்டு அப் பொருள் சுழலவும் முடியும்). A-ல் செயற்படும் எதிர்வினை (விசை) R என்பது முன் கூறிய T செயற்படுவது போலவே செயற்படும். அதாவது R-ம், W-ம் சமமான விசைகளாய் நேரெதிர்த் திசைகளில் ஒரே புள்ளி வழியாகச் செயற்பட வேண்டும். எனவே முன் கூறப்பட்ட காரணங்களைச் சார்ந்த, G வழியாக வரையப் படும் கீழ்க் குத்துக் கோட்டின் நீட்டலில் A என்ற புள்ளி யிருக்கும்.

10-7.1. **எடுத்துக்காட்டு** 1 : ஒவ்வொன்றும் a நீளமும் ω எடையும் உள்ள மூன்று சீரான கெட்டிக் கம்பிகள் AB, BC, CD என்பவை ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் மூன்று பக்கங் களாக அமையும் வகையில் இறுக்கமாக இணைக்கப்பட்டு A–விருந்து தொங்க விடப்பட்டால், CD ஒரு கிடைக் கோட்டி லிருக்கும் என நிறுவுக.



படம் 10-7.1.1.

(படம் 10-7.1.1.)-ல் கணக்கில் குறிப்பிட்டபடி, அறு கோணப் பகுதி காட்டப்பட்டிருக்கிறது. G_1 G_2 G_3 என் பவை முறையே AB, BC, CD-ன் மையங்கள்; எனவே பு. மையங்கள், அப் புள்ளியிள் வழியாக ω, ω, ω என்ற எடைகள் (விசைகள்) நேர் குத்துக் கோடுகளில், எனவே,

இணைகோடுகளில் செயற்படுகின்றன. G_3–ல் மாத்திரம் ω செயற்படுவது படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; அவ்வாறே G_1 G_2–லும். வடிவ கணிதப்படி

$$G_1 G_2 \parallel AC$$

மேலும், $\angle ACD = 90°$

$AB = BC = CD = a$ ஆனால் $G_2 C = \frac{a}{2}$

$\angle G_2 CM = 60°$ (CD–ன் நீட்டலில் உள்ளது)

$G_1 G_2 M \perp CD$ ஆதலால்,

$$CM = G_2 C \cos 60$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a}{4}$$

$$MG_2 = G_2 C \sin 60$$

$$= \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$G_1 G_2 = \tfrac{1}{2} AC$$

$$= \tfrac{1}{2} a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad MG_1 = MG_2 + G_2 G_1$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{4} a\sqrt{3}$$

இப்போது இவ் விணைப்பின் பு. மையம் காண, CD ஐ x அச்செனவும், CA ஐ y அச்செனவும் கொண்டு $G_1 G_2 G_3$–ன் x, y ஆயத் தொலைகளைப் பின்வரும் அட்டவணைப்படி காணலாம்:

பகுதி — எடை	பு. மையம்	
	x-ஆயத்தொலை	y-ஆயத்தொலை
$AB - \omega$	$CM = -\frac{a}{4}$	$MG_1 = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$
$BC - \omega$	$CM = -\frac{a}{4}$	$MG_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$
$CD - \omega$	$CG_3 = \frac{a}{2}$	பூச்சியம்.

எனவே, இணைப்புப் பொருளின் ஆயத்தொலை

$$\bar{x} = \frac{-\omega\frac{a}{4} - \omega\frac{a}{4} + \omega\frac{a}{2}}{3\,\omega} = \text{பூச்சியம்}$$

$$\bar{y} = \frac{\omega\frac{3}{4}a\sqrt{3} + \omega a\frac{\sqrt{3}}{4} + \omega\,.\,0}{3\,\omega} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

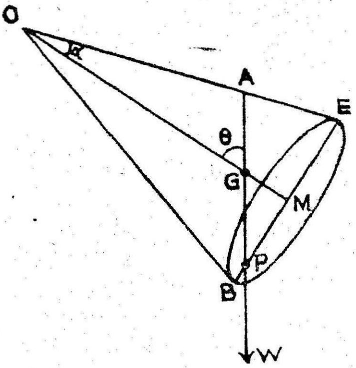
எனவே, இணைப்புப் பொருளின் பு. மையம் CA-ன் மேல் C-லிருந்து $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ தூரத்திலிருக்கும். அப் பு. மையத்தை G-எனக் கொள்க.

A–லிருந்து இவ் விணைப்புப் பொருள் தொங்க விடப் பட்டால், AGC என்பது G வழியாக உள்ள கீழ்க் குத்துக் கோடாக அமையும். $CD \perp CA$ ஆதலால் CD கிடைக் கோட்டில் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு கூம்புத் திண்மம் தனது ஒரு பிறப் பாக்கியின் (generator) மையப்புள்ளியினின்று தொங்க விடப்பட்டு அதன் அடித்தளமும் அச்சும் கீழ்க் குத்துக் கோட்டிற்குச் சமமான கோணங்களில் சாய்வுற்றிருப்பின், அக் கூம்பின் உச்சி அரைக்கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ என நிறுவுக.

(படம் 10–7·1.2.)–ல் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி சில குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கூப்பின் உயரம் h எனவும், உச்சி

அரைக்கோணம் α எனவும் கொள்க. BE அடித்தளம். $BPME$ ஓர் அடித்தள விட்டம். G. பு. மையம். M–அடித்தள



படம் 10-7.1.2.

வட்ட மையம். $\therefore\ MG = \frac{h}{4}$

OE ஒரு பிறப்பாக்கி; அதன் மையம் A.

$$\therefore\ DE = h \sec \alpha;\ OA = \frac{h}{2} \sec \alpha$$

A-லிருந்து கூம்பு தொங்கவிடப்பட்டிருப்பதால், AG என்பது G வழியாகவுள்ள கீழ்க்குத்துக் கோடு.

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டபடி,

$$\theta = \angle OGA, = \angle PGM = \angle GPM$$

$$\triangle\ GPM\text{-ல்}\ \angle GMP = 90^\circ.$$

$$\therefore\ \angle PGM = \angle GPM = 45^\circ$$

$$\triangle\ OGA\text{–ல்},\ OA = \frac{h}{2} \sec \alpha.$$

$$GO = \tfrac{3}{4} h$$

$$\angle OAG = 180 - (\theta + \alpha)$$
$$= 180 - (45^\circ + \alpha)$$

$$\therefore\ \frac{OG}{\sin \angle OAG} = \frac{OA}{\sin \angle OGA}$$

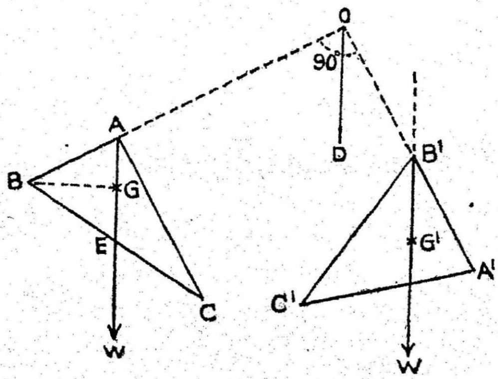
$$\frac{3h}{4 \sin (45+\alpha)} = \frac{h}{2} \frac{\sec \alpha}{\sin 45}$$

$$\frac{3}{4 \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sec \alpha}{2 \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\therefore \quad 3 = 2 + 2 \tan \alpha$

$2 \tan \alpha = 1$ அல்லது $\tan \alpha = \frac{1}{2}$
என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு முக்கோணத்திற்கு ABC, முதலில் A-லிருந்தும், பின்னர் B-லிருந்தும் தொங்கவிடப்பட்ட போது முதலில் AB இருந்த நிலையும், இரண்டாவது AB இருந்த நிலையும் ஒன்றுக்கொன்று $90°$ அளவில் சாய்திருக்கிறது எனில், $5c^2 = a^2 + b^2$ என நிறுவுக.



(படம் 10-7·1.3.)

(படம் 10-7.1.3)-ல் இரு அசைவற்ற நிலைகளும் மரபுப்படி குறியீடுகளோடு காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

முதல் நிலை ABC (A-லிருந்து தொங்குவது)

இரண்டாம் நிலை $A'\ B'\ C'$ (B-லிருந்து தொங்குவது)

ABஐ நீட்டி, $A'\ B'$ஐ நீட்டி, அவை O-ல் சந்திக்குமானால், $\angle BOA' = 90°$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. O வழியாக OD என்ற குத்துக் கோடு வரைக. இப்போது AG, OD, $B'\ G'$ மூன்றும் இணை கோடுகள்; குத்துக் கோடுகள்.

$$\therefore \quad \angle BAG = \angle AOD$$

$$= 90^\circ - \angle DOA'$$

$$= 90^\circ - \angle G'B'A'$$

$$\therefore \quad \angle BAG + \angle G'B'A' = 90^\circ$$

ஆனால், $\angle ABG = \angle A'B'G'$ (ஏனெனில், அவை ஒரே கோணங்களே)

$$\therefore \quad \angle BAG + \angle ABG = 90^\circ$$

$$\angle AGB = 90$$

$$\therefore \quad AB^2 = AG^2 + EG^2$$

அதாவது, $c^2 = AG^2 = BG^2$

ஆனால், ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$c^2 + b^2 = 2(BE^2 + AE^2)$ [E–என்பது BC-ன் மையம்]

$$= 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\tfrac{3}{2}AG\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + \tfrac{9}{2}AG^2$$

$$\therefore \quad 9\,AG^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2$$

அவ்வாறே $9\,BG^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$

ஆனால், $c^2 = AG^2 + BG^2$

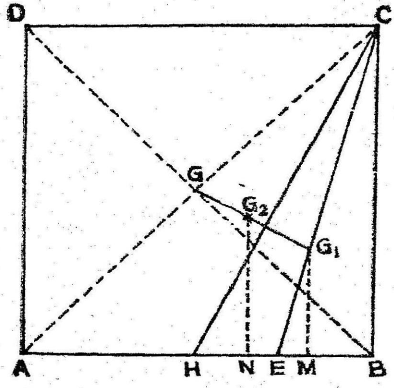
$$\therefore \quad 9\,c^2 = 9\,(AG^2 + BG^2) = 4c^2 + a^2 + b^2$$

$\therefore \quad 5c^2 = a^2 + b^2$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4: $ABCD$ ஒரு சீரான சதுரத் தகடு; H என்பது AB–ல் ஒரு புள்ளி; CBH என்ற முக்கோணப் பகுதி நீக்கப்பட்டு, எஞ்சிய தகடு AH என்ற பக்கம் ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் குத்துத் தளத்தில் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. $AH > \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\,AB$ என்ற வகையில் H அமைந்தாலொழிய, அத் தகடு நிற்க முடியாதென நிறுவுக.

(படம் 10-7.1.4. காண்க.)

ABCD என்பது *a* என்ற பக்க முடைய சதுரத் தகடு.



படம் 10-7.1.4.

$AH = x$ எனக் கொள்க; அப்போது $HB = a-x$. $\triangle CHB$ என்பது வெட்டி யெடுக்கப்படுகிறது. *ABCD*-ன் பு. மையம் *G* $\triangle CHB$-ன் பு. மையம் G_1 எனக் கொள்க.

$G_1 M \perp AB$ என வரைந்தால், $EM = \frac{1}{3} EB$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (a - x)$$

எனவே, $AM = AH + HE + EM$

$$= x + \frac{a-x}{2} + \frac{1}{6} (a - x)$$

$$= \frac{1}{3} (2a + x)$$

இப்போது *AB*, *AD* என்பவற்றை *x*, *y* அச்சுக்களாகக் கொண்டு, எஞ்சிய தகட்டுப் பகுதி *AHCD*-ன் பு. மையத்தின் *x* ஆயத் தொலை காண்போம். அவ் வாயத் தொலை *AH*ஐ விட அதிகமானுல், தகட்டுத் துண்டு விழுந்து விடும். பின்வரும் அட்டவணை காண்க:

பகுதி எடை	பு. மையம்: x ஆயத் தொலை
$ABCD :— a^2 \rho$	$G :— \frac{a}{2}$
$\Delta HCB :— \frac{1}{2} a (a - x) \rho$	$G_1 :— \frac{1}{3}(2a + x)$
பகுதி $AHCD :—$ $a^2 \rho - \frac{1}{2} a (a - x) \rho$	$G_2 :— AN = \bar{x}$ எனக்கொள்க.

$$\therefore \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{2} a (a - x) \cdot \frac{1}{3}(2a + x) + \frac{1}{2} a (a + x) \bar{x}}{a^2}$$

$$\therefore \frac{a^3}{2} = \frac{2a^3 - a^2 x - ax^2}{6} + \frac{(a^2 + ax)\bar{x}}{2}$$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{a^2 + ax + x^2}{3(a + x)}$ எனப் பெறலாம்.

$\bar{x} > x$ ஆனல், தகடு சாயும்.

$\bar{x} < x$ ஆனல் தகடு நிற்கும்.

எனவே தகடு சாயாதிருக்க வேண்டுமாயின்,

$\dfrac{a^2 + ax + x^2}{3(a + x)} < x$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $a^2 + ax + x^2 < 3ax + 3x^2$,, ,,

அதாவது $3x^2 + 3ax > x^2 + ax + a^2$,, ,,

அதாவது $2x^2 + 2ax - a^2 > 0$,, ,,

அதாவது $2\left\{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}a^2\right\} > 0$,, ,,

அதாவது $x + \frac{a}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2} a$,, ,,

$x > \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) a$,, ,,

அதாவது $AH > \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\ AB$ ஆக இருக்க வேண்டும். இந்த சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு இருந்தாலொழிய தகடு நிற்க முடியாது.

10-8. தொகை நுண் கணித முறைப்படி பு. மையம் காணல் (Finding the c. g. using the methods of Integral Calculus)

முன்னர், 10-2.1-ல் பின் கூறப்பட்டிருக்கும் தேற்றம் நிறுவப் பட்டது. "m_1, m_2, m_3 ... என்ற பொருண்மைகளின் பொருண்மை மையம்/புவியீர்ப்பு மையம் (x_1, y_1), (x_2, y_2) ...... (x_n, y_n) என்ற இடங்களில் இருக்குமானல், அப் பொருண்மைக் கூட்டின்/எடைக் கூட்டின், பொருண்மை மையம் / பு. மையம்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} m_r x_r}{\sum_{1}^{n} m_r}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{1}^{n} m_r y_r}{\sum_{1}^{n} m_r}$$

என்ற புள்ளியில் இருக்கிறது."

இங்கு $m_1, m_2, \ldots \ldots m_n$ என்பவை தனித் தனிப்பொருள் களாக கட்டிறுக்கமாக இணைக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டு எனக் கொள்ளப்பட்டது. ஆனல், அவை தனித் தனித் துகள்களாக இல்லாமல், தொடர்ச்சியான பரப்பு, பருமம், புறப்பரப்பு, நீளம் பெற்ற ஒரே கட்டிறுக்கப் பொருளாக இருப்பின்,

தொகை நுண் கணிதத்தில்,

$\sum$ என்பது $\int$ என்ற வரையறுத்த தொகையாகக் கொள்ளப்படலாம் என்ற ஒரு தேற்றம் உண்டு. அத் தேற்றம் பின் வருமாறு: (தி. கோவிந்தராசன், தொகை நுண் கணிதம், பகுதி 6,—வரையறுத்த தொகை 6-2.-ல் கொடுக்கப்பட்டு நிறுவப்பெற்ற தேற்றம்)

தேற்றம்: $f(x)$ என்னும் சார்பு (a, b) இடையே ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு; a, b இரண்டும் குறிப்பிட்ட கணியங்ககள் (எண்கள்); n ஒரு கூட்டு முழு எண்; $h = \frac{b-a}{n}$; $n \to \infty$ ஆனல் $h \to 0$; இந்தக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு அடங்கி $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ ஆனல்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\; h\{f(a) + f(a+h) + \ldots\ldots f(a + \overline{n-1}\, h)\}$$

$= F(b) - F(a)$ இத்தேற்ற அடிப்படையில்தான், தொகை நுண் கணிதமுறைகொண்டு, பல பொருள்களின் — பரப்பு, பருமம், புறப்பரப்பு, நீளம், அடர்த்தி ஒரு விதிப்படி மாறி மாறியிருக்கும் பொருள்கள் — பு, மையம் காணும் முறைகளை இப்போது காணவிருக்கிறோம்.

பு. மையம் காணும் முறை

m_1, $m_2 \ldots\ldots m_n$ – க்குப் பதிலாக ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மை—அதாவது ஒரு துகளின் பொருண்மை — Δm எனவும், அது ஒரு புள்ளியெனக் கொள்ளப்படுவதால், அதன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனக்கொள்ளலாம். சென்ற பத்தியில் கூறியபடி,

$$\bar{x} = \frac{\sum m_r\, x_r}{\sum m_r} = \frac{\sum \Delta\, mx}{\sum \Delta\, m}$$

$$= \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad \text{(குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள்)}$$

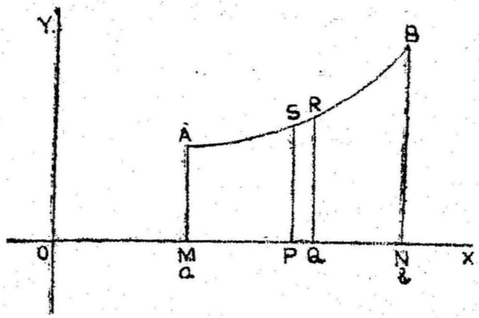
அவ்வாறே, $\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$ (அதே குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள்)

குறிப்பு: வேறென்றும் கூறப்படாவிடத்து, பொருள்களின் செறிவு, அல்லது அடர்த்தி (density) சமச்செறிவு அல்லது சீரானது என்றே கொள்ளல் வேண்டும்.

10–8.1. **ஒரு தளத்திலமைந்த பரப்புகள் :**
பு. மையம் காணல் :

$y = f(x)$ என்ற வளைவு, $x = a$, $x = b$ என்ற புள்ளிகளில் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயங்கள், x அச்சு, இவற்றுக்

கிடைப்பட்ட பரப்பு *MNBRSAM*. (படம் 10-8.1.)–ல் காட்டப் பட்டிருக்கிறது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் காணவேண்டும்.



படம் 10-8.1.

$OP = x$, $PS = y = f(x)$ எனவும் கொண்டு, சற்று தூரத்தில் $PQ = \Delta x$ (மிகச்சிறிய நீளம்—நாம் வகைக்கெழு காணும்போது கொள்ளும் அளவு) என்ற வகையில் Q இடங் குறிக்கட்டும். Q என்ற புள்ளியில் QR என y அச்சுக்கு இணை கோடு வரைக; அது $y = f(x)$ என்ற வளைவை R என்ற இடத்தில் சந்திக்கட்டும். *PQRS*–ன் பரப்பு ஒரு நுண் பரப்பு (element of area) எனப்படும். இவ்விதமான நுண் பரப்புகளின் கூட்டுத் தொகையே முழுப்பரப்பாகும்.

ρ என்பது பரப்படர்த்தி (area density) ஆனால், *PQRS* என்ற நுண் பரப்பின் பொருண்மை $= \rho y \Delta x = \Delta m$ எனக் கொள்ளலாம்; முழுப் பொருண்மை $= \sum (\Delta m)$ இக் கூட்டுக் குறியான $\sum$ என்பது $x = a$ முதல், $x = b$ வரையில் படர்ந் திருக்கிறது.

$(\Delta m) g = \rho y \Delta x g$ என்பது நுண் எடை (element of weight) எனக்கூறலாம். இவ்வித நுண் எடைகளின் கூட்டுத் தொகையே முழு எடையாகும். Δx மிக மிகச் சிறிதாகி, வகை நுண் கணித மரபுப்படி பூச்சிய எல்லையை நெருங்கும்போது, $(\Delta m) g$–ன் பு. மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $\left(x, \frac{y}{2}\right)$ என வாகும்.

எனவே,

$$\bar{x} = \frac{\sum x (\Delta m) g}{\sum (\Delta m) g}$$

$$= \frac{\sum x\ (\triangle m)}{\sum\ (\triangle m)}$$

$$= \frac{\sum xy\ \triangle x\ \rho}{\sum y\ \ \triangle x\ \rho}$$

$$= \frac{\int_{x=a}^{x=b} xy\ dx}{\int_{x=a}^{x=b} y\ dx}$$

$$= \frac{\int_{x=a}^{x=b} x f(x)\ dx}{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx}$$

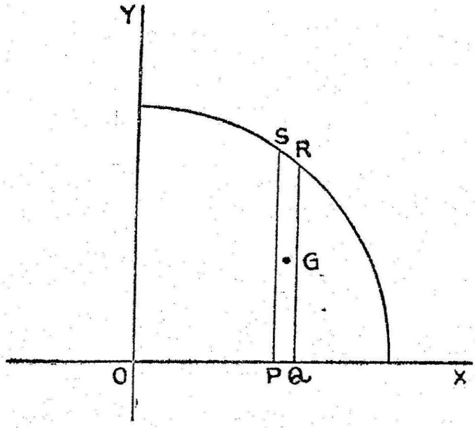
ρ என்பது சீரான, அல்லது சம அடர்த்தியுள்ள பொருளுக்கு ஒரு மாறிலியாக விருக்குமாதலால், மேல் தொகையிலும் கீழ்த் தொகையிலும் ஒன்றையொன்று நீக்கிக்கொள்ளுகின்றன.

அவ்வாறே $\bar{y} = \sum \frac{y}{2} \frac{(\triangle m)\ g}{\sum(\triangle m) g} = \frac{\sum \frac{y}{2}\ (\triangle m)}{\sum\ (\triangle m)}$

$$= \frac{\sum \frac{y}{2}\ y\ \ \triangle\ \ x\ p}{\sum y\ \triangle\ xp}$$

$$= \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}\ \ dx}{\int_a^b y\ dx}$$

எடுத்துக்காட்டு (1) : ஒரு சீரான மெல்லிய தகடு வட்ட நாற் கூறுப்பரப்பின் உருவத்தில் உள்ளது. அதன் பு. மையம் காண்க. [படம் 10-8.1.(1)]-ல் ஒரு வட்ட நாற்கூறுப் பரப்பு காட்டப்பட்டிருக்கிறது; ஆரம் a அலகுகள். வளைவின் சமன்



படம் 10-8.1. (1)

பாடு, $x^2 + y^2 = a^2$ அல்லது $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ அப் பரப்பு $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ என்ற வளைவு, x - அச்சு, $x = 0$ என்ற குத்தாயம், $x = a$ என்ற குத்தாயம்—இவற்றின் இடைப்பட்ட பரப்பாகும்.

நுண் பரப்பு $= PQRS = y\Delta x$

மற்றவை யெல்லாம் முன்னர் கூறியபடியேயாம் (10-8.1)

$$\text{எனவே } \bar{x} = \int_0^a xy\ dx \Big/ \int_0^a y\ dx$$

ஆனால், $\int_0^a y\ dx$ என்பது வட்ட நாற்கூறின் பரப்பு $= \frac{\pi a^2}{4}$

எனவே, அதைக் கவனிக்கவேண்டியதில்லை.

$$\text{எனவே, } \frac{\pi a^2}{4}\ \bar{x} = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \tfrac{1}{3}\ a^3$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \int_0^a \frac{y^2}{2}\,dx \Bigg/ \int_0^a y\,dx$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx}{\dfrac{\pi a^2}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \frac{4}{\pi a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$

எனவே ஆயத் தொலை $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$.

முக்கியக் குறிப்பு (1): இது வட்ட நாற் கூறுக இல்லாமல், அரை வட்டத் தகடாக இருந்தால், அதன் **பு.** மையம் $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ எனக் கிடைக்கும் என்பதை அறிக.

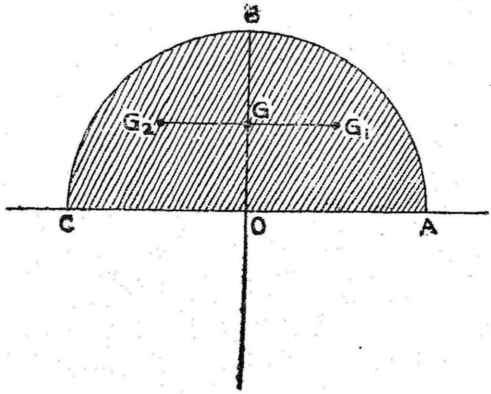
பின் வரும் படமுர் விளக்கும்.

OAB-ன் பு. மையம் $G_1\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$

OBC-ன் பு. மையம் G_2

$$\left(-\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$$

எனவே, அரை வட்டத்தின் பு. மையம் G_1 G_2-ன் மையமான G-ல் இருக்கும். G, y அச்சின் மேல் O-விருந்து $\frac{4a}{3\pi}$ தூரத்திலிருக்கும்.



படம் 10-8.1. (2)

குறிப்பு (ii) : முதன் மூன்று நாற்கூறுகள் உருவம் தாங்கிய தகட்டின் பு. மையம் இதைக் கொண்டு காணலாம்.

OAD என்ற நாற்கூறின் பு. மையம் $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{-4a}{3\pi}\right)$

$(\bar{x}, \bar{y})$ நமக்கு வேண்டிய பு. மையம் எனில்,

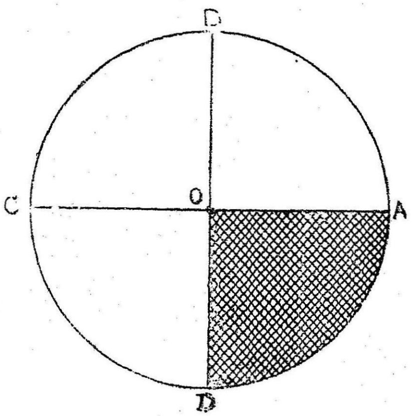
$$0 = \frac{\frac{3\pi a^2}{4} \cdot \bar{x} + \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{4}}{\pi a^2}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{-a^3 \times 4}{3 \times 3\pi a^2}$$

$$= -\frac{4a}{9\pi}$$

அவ்வாறே $0 = \dfrac{\frac{3\pi a^2}{4}\bar{y} - \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi a^2}{4}}{\pi a^2}$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a^8}{3} \times \frac{4}{3\pi a^2} = \frac{4a}{9\pi}$$



படம் 10-8.1. (8).

$\left(-\frac{4a}{9\pi}, \frac{4a}{9\pi}\right)$ என்ற புள்ளியில் நான்காம் நாற்கூறு நீங்கிய வட்டத் தகட்டின் பு. மையமிருக்கும்.

10–8.1.1. பரப்புகள் : பு. மையம் (தொடர்ச்சி)

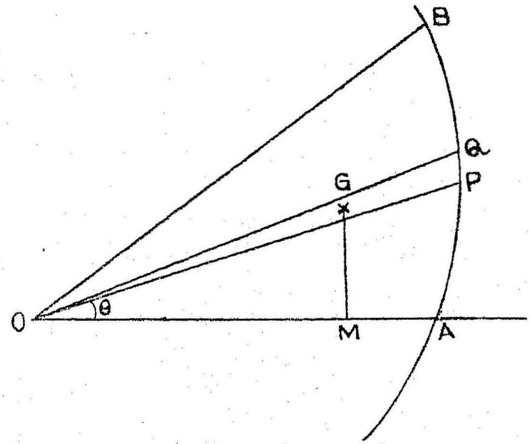
ஒரு தகட்டின் விளிம்பு உருவம் போலார் ஆயத் தொலை களிலும் பெறப்படலாமாதலால், போலார் சமன்பாட்டின் படியும், ஒரு பரப்பின் பு. மையம் காணலாம்.

ஆதிக் கோடு OA, போலார் சமன்பாடு $r = f(\theta)$ என்ற வளைவு, $\theta = \alpha$ என்ற மூன்றினுள் இடைப்பட்ட பரப்பின் உருவத்தில் ஒரு தகடு இருக்கிறதெனக் கொள்வோம். (படம் 10–8.1.1.)–ல் $OAPQB$ என்பது அவ்விதப் பரப்பு. $\angle AOB = \alpha$; $r = f(\theta)$ என்ற சமன்பாடு பெற்ற வளைவு $APQB$. OPQ என்ற ஒரு நுண்பரப்புப் பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அப் பரப்பானது,

θ-லிருந்து $(\theta + \Delta\theta)$ என்ற கோணங்களுக் கிடைப்பட்டு, PQ என்ற சிறு வில்லால் வரம்பிடப் பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்ளலாம்.

$\angle AOP = \theta$; $\angle AOQ = \theta + \Delta\theta$; $\angle POQ = \Delta\theta$

$OP = r$ எனவும் $[r = f(\theta)]$



படம் 10-8.1.1.

$OQ = r + \Delta r$ எனவும் $\{r + \Delta r = f(\theta + \Delta\theta\}$

ஏற்ருல், நுண்பரப்புப் பகுதி

$\frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta\theta$ என வரும்.

இவ்விதமான நுண்பரப்புப் பகுதிகளின் கூட்டு மதிப்பே $OAPQB$-ன் பரப்பாகும். ∴ முழுப் பரப்பு

$$= \sum \tfrac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} r^2 \, d\theta$$ என நாம் தொகை நுண்

கணித மரபுப்படி எழுதலாம். ρ என்பது இத் தகட்டின் பரப்படர்த்தி யெனக் கொண்டால்

நுண் எடை $= \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta\theta \, g\rho$

∴ முழு எடை $\frac{1}{2} g\rho \int_0^{\alpha} r^2 \, d\theta$

OPQ என்பதை ஒரு முக்கோணம் எனக் கொண்டால், OPQ என்ற நுண் பகுதியின் பு. மையம் G–ல் இருக்கும். எனவே அந் நுண் பகுதியின் பு. மையத்தின்

x ஆயத் தொலை $= \frac{2}{3} r \cos \theta$

y ஆயத் தொலை $= \frac{2}{3} r \sin \theta$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\frac{1}{2} g\rho \int_0^\alpha r^2 \, \frac{2}{3} r \cos \theta \, d\theta}{\frac{1}{2} g \rho \int_0^\alpha r^2 \, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \int_0^\alpha r^3 \cos \theta \, d\theta}{\int_0^\alpha r^2 \, d\theta}$$

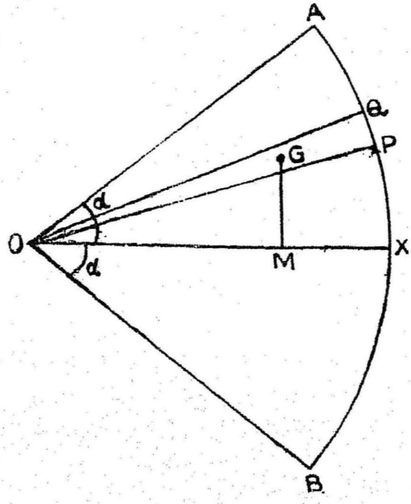
அவ்வாறே, $\bar{y} = \dfrac{\frac{2}{3} \int_0^\alpha r^3 \sin \theta \, d\theta}{\int_0^\alpha r^2 \, d\theta}$

கீழ்த் தொகையான $\int_0^\alpha r^2 \, d\theta$ என்பது பரட்

காதலால், தொகை காணும் வழியல்லாமல், நேரடியாக நமக்குப் பரப்பு தெரியுமானால், அந்தப்பரப்பு மதிப்பையே நாம் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு : $\theta = \alpha$ முதல் $\theta = \beta$ வரை உள்ள பரப்பின் பு. மையம் காண வேண்டுமானால், $\int_0^\alpha$ ...... க்குப் பதிலாக $\int_\alpha^\beta$ ...... எனக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : a ஆரம் கொண்டு, மையக் கோணம் 2α கொண்ட ஒரு வட்டத் துண்டின் உருவத்தில் ஒரு தகடு இருக்கிறது. அதன் பு. மையம் காண்க.



படம் 10-8.1.1. (1).

மையக் கோணம் 2α பெற்ற வட்டப் பரப்பு [படம் 10–8.1 1. (1)]–ல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. ஆனால், ஒரு வச[illegible] கையில் நாமறிந்த முறையைப் பயன்படுத்தினால், [illegible]ளி குறைவாகும். OX என்ற அச்சுக்கு இரு[illegible]மும், α, α கோணமுள்ள கோடுகளை எடுத்துக் கொண்டு, O மையங் கொண்டு a ஆரம் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்தால், AOB என்ற வட்டப் பரப்புத் துண்டு வரும். OXஐ ஒட்டி, இப் பரப்பு சமச்சீர் பெற்றிருப்பதால், பு. மையம்

OX-ன் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியில் இருக்க வேண்டுமென்பது தெரிகிறது. அதாவது $\bar{y} = 0$; எனவே $\bar{x}$ மட்டும் கண்டால் போதும்.

இவ் வட்டத்தின் போலார் சமன்பாடு $r = a$.

$$\text{எனவே, } \bar{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\, d\theta \cdot \frac{2}{3} r \cos\theta}{\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\int_{-\alpha}^{\alpha} a^3 \cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\, d\theta}$$

a என்பது ஒரு மாறிலி யாதலால்,

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} a\,(\sin\theta)_{-\alpha}^{\alpha}}{(\theta)_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} a \sin\alpha}{2\alpha}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{a \sin\alpha}{\alpha}$$

$$\bar{y} = 0.$$

கி. முடிவுகள் (1): பரப்பு ஒரு வட்ட நாற்கூறு எனக் கொண்டால்,

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ எனவாகும்.

$$\text{அப்போது } \bar{x} = \frac{2a \sin \frac{\pi}{4}}{3\pi/4}$$

$$= \frac{8a}{\sqrt{2}.3\pi}$$

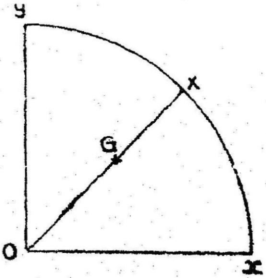
$$= \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$$

$\bar{y} = 0$ எனவரும் :

ஆனால் இவை, மையக்கோடு OX ஐ ஒட்டியதாகும்.

[படம் 10-8·1.1.(2)]-ல் காட்டியபடி $OG = \dfrac{4\sqrt{2}.a}{3\pi}$ எனவரும்

வரம்பிடும் ஆரங்களையொட்டி நமக்கு பு-மையம் வேண்டுமானால்,



படம் 10-8.1.1 (2)

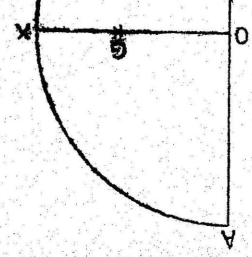
$$\bar{x} = OG \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}.a}{3\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = OG \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4a}{3\pi}$$

(2) பரப்பு ஒரு அரைவட்டமெனக் கொண்டால், நாம் $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ எனக் கொள்ளல்வேண்டும். [படம் 10-8·1.1.(3) காண்க] அரைவட்டத்தை வரம்பிடும் விட்டத்திற்கு வட்டமையம் வழியாக வரையப்படும் செங்கோட்டின் மேல் $OG = \dfrac{4a}{3\pi}$ என்ற வகையில் உள்ள G என்ற புள்ளியில் பு. மையமிருக்கும்.

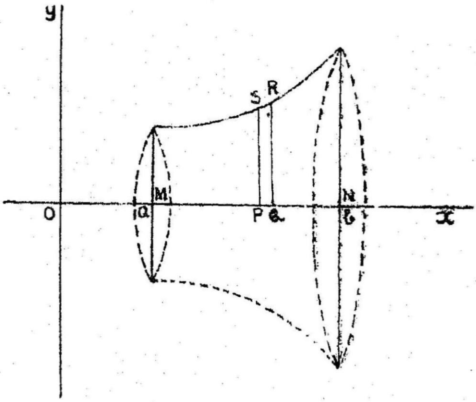


படம் 10-8.1.1.(3)

10-8·2. சுழற் பருமங்கள் — பு. மையம் காணல்

ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பு x அச்சைச் சுற்றினால் ஒரு சுழற்பருமம் பெறப்படும். அவ்விதமான பருமத்தின் பு. மையம் காண்போம்,

10-8.1-ல் கூறிய பரப்பு *MNBRSAM* x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினுல், அது ஒரு லோட்டா அல்லது டம்ளர் உருவத்தில் உள்ள பருமத்தைப் பிறப்பிக்கும். [படம் 10-8.2 காண்க.] இக்கனப் பொருளின் சீரான அடர்த்தி அல்லது சமச் செறிவு ρ எனக் கொள்வோம். *PQRS* என்ற நுண் பரப்பு x அச்சைச் சுற்றும்போது பிறக்கும் உருளையின் ஆரம் y ($= ps$),



படம் 10-8.2 1.

உயரம் Δx $(= PQ)$. எனவே, ஒரு நுண் பருமம் $\pi y^2 \Delta x$. அந் நுண்பருமத்தின் பொருண்மை $\pi y^2 \Delta x \rho$; எடை $\pi y^2 \Delta x \rho g$; இதன் பு. மையம் $(x,0)$ என்ற இடத்தில் இருக்கும். இப்பருமம் x அச்சை யொட்டி சமச் சீருடையதாயிருப்பதால், பு.மையம் *OX*-ன் மேல், அதாவது *MN*-ல் ஏதாவதொரு புள்ளியில்தான் இருக்கும். எனவே $\bar{y} = 0$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$$

இங்கு, $\Delta m = \pi y^2 \Delta x \rho$ என்பதைக் காணலாம்.

எனவே,

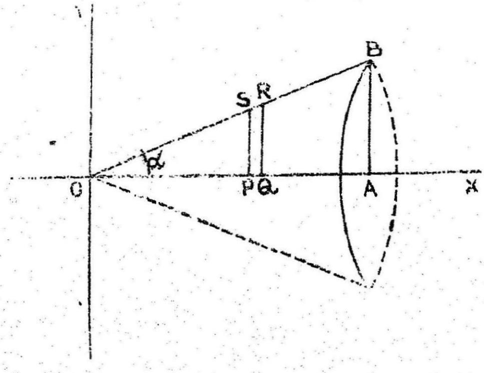
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \pi y^2\, dx\, \rho}{\int_a^b \pi y^2\, dx\, \rho}$$

$$= \frac{\int_a^b x y^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx}$$ எனவரும்.

சில இடங்களில் $\int_a^b \rho \pi y^2 \, dx$-ன் மதிப்பான அப்பொருளின் பொருண்மை, தொகை காணுமலேயே நமக்குத் தெரியுமானல் அதையே நேரடியாகப் பயன் படுத்திக் கொள்ளலாம்.

அப்போது $\bar{x} = \dfrac{\int_a^b \rho \pi x y^2 \, dx}{\text{பொருண்மை}}$ எனப் பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு சீரான வட்டதளமுள்ள கூம்புத் திண்மத்தின் பு. மையங் காண்க.



படம் 10-8.2.1

OAB என்ற செங்கோண முக்கோணம் எடுத்துக்கொள்க. $AB = r$, $\angle AOB = \alpha$ எனவும் கொள்க. OA ஐ x அச்சாகக் கொண்டு முக்கோணப் பரப்பு OAB ஐ ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றினல், ஒரு கூம்புத்திண்மம் பெறப்படும். அதன் உச்சி O; அடி வட்டதளமுடையது; தளவட்ட ஆரம் r; உயரம் $OA = r \cot \alpha$. OB-ன் சமன்பாடு $y = mx = x \tan \alpha$; இந்தக் கோடு, $x=0$, $x = r \cot \alpha$, x அச்சு இவற்றுக்கிடைப்பட்ட OAB என்ற முக்கோணப்பரப்பு ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றினல் பெறப்படுவது ஒரு கூம்பு. இது OX ஐ ஒட்டி சமச் சீருடையதால், பு. மையம் OA-ன் மேலேயிருக்கும்; அதாவது $\bar{y} = 0$. $\bar{x}$ மட்டுமே காண

வேண்டும். $PQRS$ என்ற நுண்பரப்பை எடுத்துக் கொள்க. $OP = x$, $PQ = \Delta x$, $PS = y = x \tan \alpha$ எனக்கொள்வோம். இச்சிறுநுண்பரப்பு x அச்சைச் சுற்றுவதால் பெறப்படும் உருளையின் பருமம் $= \pi y^2 \Delta x \; (y = x \tan \alpha)$

$$= \pi x^2 \tan^2 \alpha \, \Delta x;$$

இதன் பொருண்மை $\Delta m = \pi x^2 \tan^2 \alpha \, \Delta x \, \rho$

இதன் பு. மையம் $(x, 0)$–இல் இருக்கும்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^{r \cot \alpha} x \, dm}{\int_0^{r \cot \alpha} dm}$$

$$\int_0^{r \cot \alpha} dm = \text{கூம்பின் பொருண்மை.}$$

$$= \tfrac{1}{3} \pi r^2 \, r \cot \alpha \, \rho$$

$$= \tfrac{1}{3} \pi r^3 \cot \alpha \, \rho$$

எனவே, $\bar{x}$-ல் மேலெண் மட்டும் காண்போம்.

$$\text{மேலெண்} = \int_0^{r \cot \alpha} \pi x^2 \tan^2 \alpha \, dx \, \rho . \, x.$$

$$= \pi \rho \tan^2 \alpha \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{r \cot \alpha}$$

$$= \pi \rho \frac{r^4 \cot^2 \alpha}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{\pi \rho r^4 \cot^2 \alpha}{4 . \tfrac{1}{3} \pi r^3 \cot \alpha . \rho}$$

$$= \tfrac{3}{4} r \cot \alpha$$

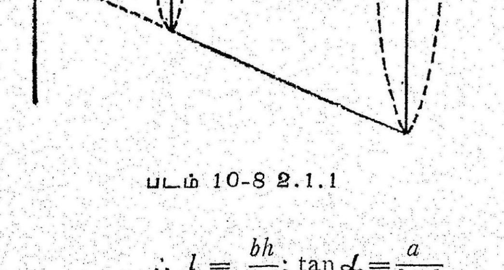
$r \cot \alpha$ = கூம்பின் உயரம் h எனக் கொண்டால், பு. மையம், உச்சி O–விருந்து $\frac{3}{4}h$ தூரத்தில் அதாவது வட்ட தளத்திலிருந்து $\frac{1}{4}h$ தூரத்தில் கூம்பின் அச்செனப்படும் OA–ன் மேலிருக்கிறது.

இதையொட்டி, ஒரு கூம்புத் துண்டின் பு. மையம் காணலாம்.

ஒரு கூம்பின் அடித்தள வட்ட ஆரம் a; அடித்தளத்திலிருந்து h உயரத்தில், அடித்தளத்திற்கு இணையான ஒரு தளம் அக் கூம்பை வெட்டுகிறது. வெட்டுமுக வட்டத்தின் ஆரம் b. இக் கூம்புத் துண்டின் பு. மையம் காண்க.

(படம் 10–8.2.1.1. காண்க.) OCD–என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx = x \tan \alpha$ எனக் கொள்வோம்; α நமக்குத் தெரியாது. $OB = l$ எனக் கொண்டால், $BADC$ என்ற பரப்பு x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றினுல் கணக்கில் கூறப்பட்ட கூம்புத் துண்டு கிடைக்கும்; l–ன் மதிப்பும் தெரியாது; a, b, h என்ற மூன்றின் மதிப்புகள் மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

வடிவ கணிதப்படி, $\dfrac{l+h}{l} = \dfrac{a}{b}$



படம் 10-8 2.1.1

$$\therefore\ l = \frac{bh}{a-b};\ \tan \alpha = \frac{a}{l+h}$$

$$= \frac{a-b}{h}$$

கூம்புத் திண்மத்தின் பொருண்மை $= \frac{1}{3}\pi a^2 (l+h)\rho - \frac{1}{3}\pi b^2 l\rho$

$$= \left[\frac{1}{3}\pi \frac{a^2 (ah)}{a-b} - \frac{1}{3}\frac{\pi b^2 (bh)}{a-b}\right]\rho$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi h\rho}{(a-b)}(a^3 - b^3)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\rho (a^2 + ab + b^2)$$

OXஐ ஒட்டி இப்பகுதி சமச்சீருடையதாகையால் $\bar{y} = 0$ தொகை காண வேண்டிய எல்லைகள் $x = l$ முதல், $x = l + h$ வரை எனக் காணலாம். எனவே,

$$\bar{x} = \int_l^{l+h} \pi y^2 x\rho \, dx \div \frac{1}{3}\pi h\rho (a^2 + ab + b^2)$$

மேலெண்ணாக உள்ள தொகையைக் கணிப்போம்.

$$\int_l^{l+h} \pi y^2 x \rho \, dx = \pi \rho \int_l^{l+h} x^3 \tan^2 \alpha \, dx$$

$$= \pi \rho \tan^2 \alpha \left[\frac{(l+h)^4}{4} - \frac{l^4}{4}\right]$$

$$= \pi \rho \frac{\tan^2 \alpha}{4}\left\{\frac{a^4 h^4}{(a-b)^4} - \frac{b^4 h^4}{(a-b)^4}\right\}$$

$$= \frac{\pi\rho \, h^4}{4(a-b)^4} \cdot \frac{(a-b)^2}{h^2}(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$= \frac{\pi\rho}{4}\frac{h^4}{h^2}\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{(a-b)}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\pi \rho}{4}\frac{h^4 (a^2 + b^2)(a+b)}{h^2 (a-b)} \times \frac{3}{\pi h\rho(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{h (a^2 + b^2) (a+b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

கீழ்த்தள மட்டத்திலிருந்து பு. மையம் இருக்கும் தூரம்

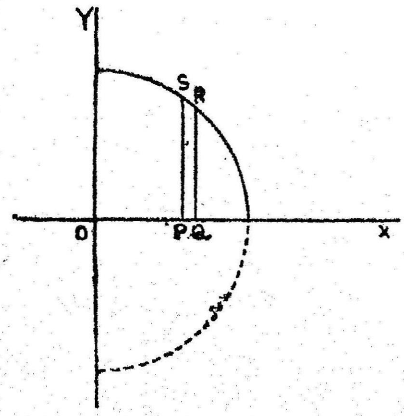
$$= (l+h) - \tfrac{3}{4}\ \frac{h(a^2+b^2)(a+b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{ah}{a-b} - \frac{3}{4}\ \frac{h(a^2+b^2)(a+b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{h}{(a-b)}\ \frac{(a-b)(a^2+2ab+3b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$

$$= \frac{h}{4}\ \frac{(a^2+2ab+3b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு சீரான அரைக்கோள திண்மத்தின் பு. மையம் காண்க.



படம் 10-8.2.2.

a ஆரமுள்ள வட்டத்தின் முதல் நாற் கூறுப் பரப்பை x அச்சை யொட்டி ஒரு முழுச் சுற்றுச்சுற்றினுல், a ஆரமுள்ள ஓர் அரைக்கோளத் திண்மம் வரும்.(y அச்சை யொட்டி சுற்றினுலும் வரும்.) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$. எனவே, $\Delta m = \pi y^2 \Delta x \rho$. OX-ஐ யொட்டி இத்திண்மம் சமச்சீர் உடையதாதலால், பு. மையம் x அச்சின்மேலிருக்கும். எனவே, $\bar{y} = 0$. $\bar{x}$ காண x-ல் எல்லைகள் 0 முதல் a வரை. Δm-ன் பு. மையம் $(x, 0)$-ல் இருக்கும்.

$$\text{எனவே,}\quad \bar{x} = \frac{\int_0^a x\,\pi y^2\,dx\,\rho}{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho}$$

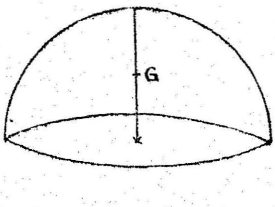
இதில் கீழெண் ஓர் அரைக் கோளத்தின் எடை.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{3}{2a^3}\int_0^a x\,(a^2 - x^2)\,dx$$

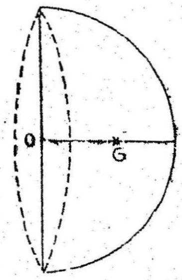
$$= \frac{3}{2a^3}\left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \frac{3}{2a^3} \times \frac{a^4}{4} = \frac{3a}{8}$$

அதாவது ஓர் அரைக்கோளத்தின் அடித்தளமாகிய வட்ட முகத்திலிருந்து, கோள மையம் வழியாக அடித்தளத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் மேல் $\frac{3}{8}a$, அதாவது $\frac{3}{8}$ ஆரம் தூரத்தில் பு. மையமிருக்கும். [படம் 10-8.2.2., 10–8.2.2. (1), 10–8.2.2. (2) பார்க்க] G–பு. மையம். $OG = \frac{3}{8}a$ ஆகவிருக்கும்.



படம் 10-8.2.2. (1)

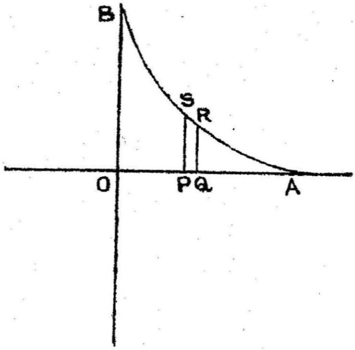


படம் 1˙-8.2.2. (2)

எடுத்துக்காட்டு 3: $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்ற வளைவின் முதல் நாற் கூறுப் பகுதியிலுள்ள பரப்பு x அச்சை

ஒரு முழுச் சுச்றுற் சுற்றினுல் பெறப்படும் சீரான திண்மத்தின் பு. மையம் காண்க.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x	a	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	0
y	0	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	a



படம் 10-8.2.3.

மேற் காட்டப்பட்ட அட்டவணைப்படி, முதல் நாற் கூறுப் பகுதியில், அவ் வளைவு வரைந்தால் அது (படம் 10–8.2.3)–ல் உள்ளபடி இருக்கும். இப் பரப்பின் எல்லைகள் $x=0$ முதல், $x=a$ வரை. இப் பரப்பு x அச்சை மையங்கொண்டு சுற்றினுல் பெறப்படும் திண்மத்தின் பு. மையம் x அச்சின் மேலிருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

$$\bar{x} = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} x\,\pi\, y^2\, dx\, \rho \div \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\, y^2\, dx\, \rho$$

$$\int_0^{\pi/2} \pi\, y^2\, dx\, \rho = \pi\rho \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^6\theta\,(-3a\cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta$$

$$= -3a^3\,\pi\rho \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -3a^3\,\pi\rho\; \frac{6.\,4.\,2.\,1}{9.\,7.\,5.\,3.\,1.}$$

$$= -\frac{16\,\pi\, a^3\rho}{105}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\, x y^2\, dx\, \rho = \pi\, \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos^3\theta \cdot a^2 \sin^6\theta (-3a \cos^2\theta \sin\theta) d\theta$$

$$= -3\, \pi\, \rho\, a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \; \sin^7\theta\, d\,\theta$$

$$= -3\, \pi\, \rho\, a^4 \; \frac{4.\; 2.\; 6.\; 4.\; 2.}{12.\; 10.\; 8.\; 6.\; 4.\; 2}$$

$$= \frac{-\pi}{40}\, \rho\, a^4$$

$$\therefore\; \bar{x} = -\frac{\pi}{40}\, \rho\, a^4 \times \frac{105}{-16\, \pi\, a^3\, \rho}$$

$$= +\frac{21}{128}\, a$$

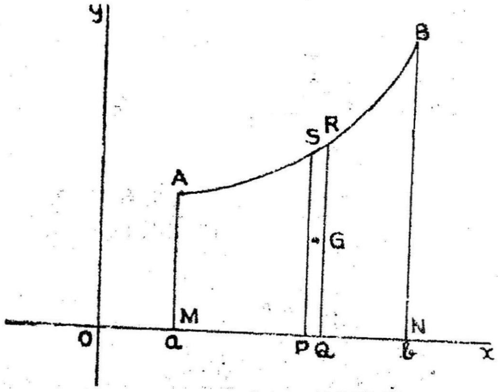
$\left(\frac{21\,a}{128}, 0\right)$ என்பது அவ்வுருளைத் திண்மத்தின் பு. மையமாகும்.

10–8.3. **மேற்பரப்பு — பு. மையம் காணல்**

முன்னர் 10–8·1.-ல் குறிப்பிட்ட பரப்பு, x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றுமானால், ஓர் உருளைத் திண்மம் ஏற்படுகிறது. அத் திண்மத்தின் மேற்பரப்புக்கு மட்டும் பு. மையம் காணும் முறையைப் பார்ப்போம். அப்பரப்பு பிறப்பதைப் பின் வருமாறும் கூறலாம்: "$y = f(x)$ என்ற வளைவு, $x = a$ $x = b$ என்ற குத்தாயங்களைச் சந்திக்கிறது; அப்படி அக் குத்தாயங்களால் வெட்டப்பட்ட வளைவின் பகுதி அல்லது வில் x அச்சை மையங்கொண்டு ஒரு முறை சுற்றினால் பெறப்படும் பரப்பு."

(படம் 10–8·3.)-ல் $y = f(x)$ என்ற வளைவுப் பகுதியான AB என்ற வில் $x = a$, $x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்டது. இவ் விற்பகுதி OX ஐ மையங்கொண்டு ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றுகிறது. மரபுப்படி, SR என்ற ஒரு நுண்வில் Δs எனக் கொள்வோம். அந்த நுண்வில் OX ஐ மையங்கொண்டு

சுற்றினுல் ஒரு நுண் உருளைப் பரப்பு கிடைக்கும். அதன் ஆரம் y. எனவே, ஒரு நுண்பரப்புப் பகுதி (an element of surface) $2\pi y \Delta x$ என வரும். அதன் பொருண்மை $2\pi y \Delta x \rho$



படம் 10-8·3.

அதன் எடை $2\pi y \Delta x \rho g$.

அதன் பு. மையம் இருக்குமிடம் $(x, 0)$. இம் மேற்பரப்பு OX–க்குச் சமச் சீருடையதாயிருக்கிறபடியால், அதன் பு. மையம் OX-ன் மேல் — அதாவது MN–ல் ஒரு புள்ளியாக விருக்கும்.

$$\text{எனவே } \bar{y} = 0;\ \bar{x} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \, ds \, \rho \cdot x}{\int_a^b 2\pi y \, ds \, \rho}$$

$$= \frac{\int_a^b x y \, ds}{\int_a^b y \, ds}$$

$$= \frac{\int_a^b x\, y\, \frac{ds}{dx}\, dx}{\int_a^b y\, \frac{ds}{dx}\, dx} \text{ என வரும்.}$$

இங்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ என நமக்கு வகை நுண் கணி தப்படி தெரியும்; $y = f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ எனக் கண்டு கொள்ளலாம்.

முக்கியக் குறிப்பு : ஒரு பரப்பு x அச்சைச் சுற்றுங்கால் கொள்ளப்படும் நுண் பருமம் அல்லது நுண் திண்மம் (Element of volume in a solid of revolution) $\pi y^2 \Delta x$; ஒரு வில் x அச்சைச் சுற்றுங்கால் கொள்ளப்படும் (Element of Surface in a surface of revolution) $2\pi y \Delta s = 2\pi y \frac{\Delta s}{\Delta x} \Delta x$. இவற்றில் காணும் வேறுபாடு கவனத்தில் இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: r ஆரங்கொண்டு, h உயரம் கொண்ட ஒரு பொள்ளற் கூம்பின் பு. மையம் காண்க.

முன்னர் 10–8.2–ல் எ. கா (1)–ல் எடுத்துக்காட்டாகக் கொண்ட கூம்பும் இதுவேதான். ஆனல், அது ஒரு திண்மக் கூம்பு; இது அதே கூம்பின் மேற்பரப்பு மட்டும் அதாவது உள்ளே குவியமாய் உள்ள கூம்புருவம் தாங்கும் ஒரு சீரான தகடு; பரப்படர்த்தி அல்லது பரப்புச் செறிவு சீரான ρ எனக் கொள்ளலாம்.

(படம் 10-8·3.1. காண்க) RS என்ற வில், x அச்சைச் சுற்றுவதால் பெறப்படும் நுண் பரப்பு $2\pi y \Delta s$

நுண் பொருண்மை $2\pi y \Delta s \rho$

நுண் எடை $2\pi y \Delta s \rho g$

அதன் பு. மையம் $(x, 0)$

x அச்சுக்கு அம் மேற்பரப்பு சமச் சீருடையதாயுள்ள படியால், பு. மையம் x அச்சின் மேலிருக்கும். எனவே, $\bar{y} = 0$. OB என்ற கோட்டின் சமன்பாடு $y = x \tan \alpha$.

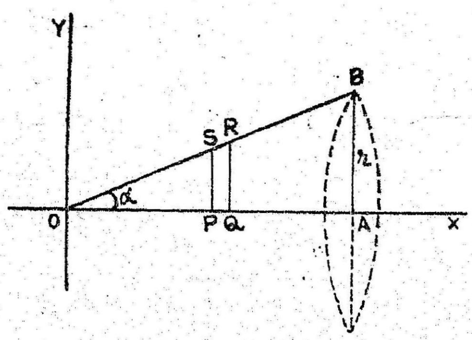
$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sec \alpha$$

கூம்பின் உயரம் $OA = r \cot \alpha$

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=0}^{x=r\cot\alpha} 2\pi y \, ds \, \rho \, . \, x}{\int_{x=0}^{r=\cot\alpha} 2\pi y \, ds . \, \rho}$$



படம் 10-8.3.1.

$$= \frac{\int_0^{r\cot\alpha} x y \frac{ds}{dx} \, dx}{\int_0^{r\cot\alpha} y \frac{ds}{dx} \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^{r\cot\alpha} x\,y \sec\alpha \, dx}{\int_0^{r\cot\alpha} y \sec\alpha \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^{r\cot\alpha} x^2 \, dx}{\int_0^{r\cot\alpha} x \, dx} \quad (\because \; y = x\tan\alpha)$$

$$= \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{r\cot\alpha}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{r\cot\alpha}} = \tfrac{2}{3}\, r\cot\alpha.$$

அதாவது கூம்பின் மேற் பரப்பின் பு. மையம் OA-ன் மேல் O-விருந்து $\frac{2}{3}$ OA அளவு தூரத்தில் இருக்கும்; அல்லது A-விருந்து $\frac{1}{3}$ OA தூரத்திலிருக்கும்.

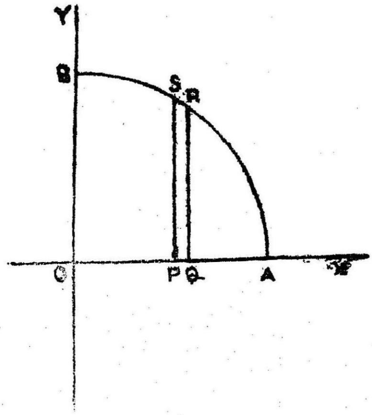
குறிப்பு : கூம்புத் திண்மத்தின் பு. மையம் O–விருந்து $\frac{3}{4}$ OA தூரத்தில் அல்லது கூம்பின் அடித் தளத்திலிருந்து $\frac{1}{4}$ OA தூரத்திலிருக்கும். இந்த வேறுபாடு கவனத்திற்குரியது.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு குழிவான மெல்லிய அரைக் கோள வடிவிலுள்ள ஒரு கிண்ணத்தின் பு. மையம் காண்க.

(படம் 10–8.3.2)-ல் காட்டப்பட்டிருக்கும் முதல் நாற் கூறிலுள்ள AB என்ற கால் வட்ட வரை, ஒரு முறை x அச்சை ஒரு முழுச் சுற்றுச் சுற்றுமானல், ஒரு குவிய அரைக் கோள வடிவாக் கிண்ணம் பெறப்படும். OX–க்குச் சமச் சீரான உருவ

மாதலால், பு. மையம் x அச்சின்மேல் இருக்கும். வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$. எனவே $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



படம் 10-8.3.2.

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{a}{y}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} 2\pi y \, ds \, \rho \, x}{\int_{x=0}^{x=a} 2\pi y \, ds \, \rho}$$

$$= \frac{\int_0^a x\, y \frac{ds}{dx} \, dx}{\int_0^a y \frac{ds}{dx} \, dx}$$

$$\text{மேலெண்} = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a}{y}\,dx = \int_0^a a\,x\,dx$$

$$= a\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^a = \frac{a^3}{2}$$

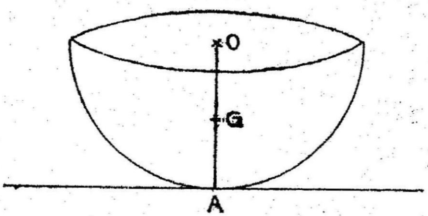
$$\text{கீழெண்} = \int_0^a y\,\frac{ds}{dx}\,dx$$

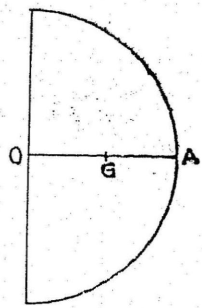
$$= \int_0^a y\,\frac{a}{y}\,dx$$

$$= \int_0^a a\,dx = a^2$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{a^3}{2a^2} = \frac{a}{2}$$

எனவே, ஒரு சீரான மெல்லிய அரைக் கோள வடிவிலுள்ள கிண்ணத்தின் பு. மையம், அடி வட்ட வரைத் தளத்திற்கு,





படம் 10-8.3.2.1.

பு. மையம் G; $OG = \dfrac{a}{2}$.

கோள மையம் வழியாக வரையப்படும் செங்கோட்டின் பாதிதூரத்தில் **இருக்கும்.** [படம் 10-8.3.2.1-ல்) பார்க்க.]

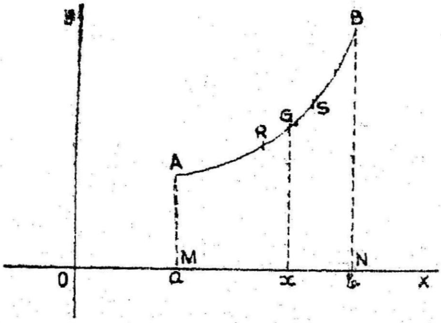
10–8.4. ஒரு வளைவு வில்லின் பு. மையம்

(படம் 10–8.1.)-ல் $y = f(x)$ என்ற வளைவின் ஒரு பகுதி, $x = a$ முதல், $x = b$ வரை; அப்பகுதி AB. அதில் ஒரு நுண் பகுதி $RS = \Delta s$ எனக் கொள்ளலாம்.

எனவே நுண் பொருண்மை $\Delta m + \Delta s\ \rho$

நுண் எடை $= \Delta s\ \rho\ g$

இதன் பு. மையம் (x, y)



10-8.4.

எனவே $\bar{x} = \dfrac{\displaystyle\int_{x=a}^{b} x\ dm}{\displaystyle\int_{x=a}^{b} dm}$

$$= \frac{\displaystyle\int_{a}^{b} x\ \frac{ds}{dx}\ dx}{\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{ds}{dx}\ dx}$$

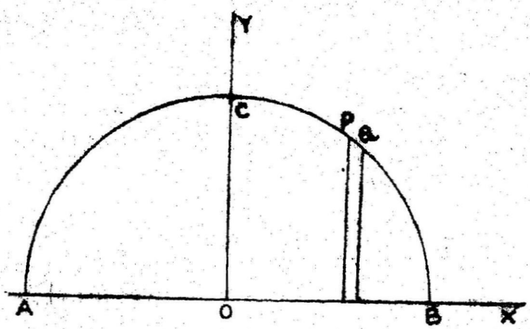
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \frac{ds}{dx} \, dx}{\int_a^b \frac{ds}{dx} \, dx}$$

$$= \frac{\int_a^b f(x) \frac{ds}{dx} \, dx}{\int_a^b \frac{ds}{dx} \, dx}$$

இங்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$= \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ என ஈடு செய்து $\bar{x}, \bar{y}$ காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஓர் அரைவட்ட உருவத்தில் உள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பியின் பு. மையம் காண்க. வட்ட ஆரம் a எனக் கொள்க.



படம் 10-8.4. (1)

ACB என்பது அவ் வரை வட்டக் கம்பி எனக்கொள்க. PQ என்ற வில் Δs எனவும்; நுண் பொருண்மை $\Delta s\rho$ எனவும்,

நுண் எடை $\Delta s \rho g$ எனவும் கொள்க. இவ் வில்லின் பு. மையம் (x, y) எனக் கொள்ளலாம். இவ் வில் $x = -a$ முதல் $x = +a$ வரை அமைந்திருக்கிறது.

OYஐ ஒட்டி, இது சமச் சீராயிருப்பதால் $\bar{x} = 0$ என வரும். வட்டச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$

$$\therefore \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{a}{y}$$ எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore \bar{y} = \int_{-a}^{a} y \frac{ds}{dx}\, dx\, \rho \div \pi a \rho$$

ஏனெனில், கம்பியின் அடர்த்தி ஓர் அலகு நீளத்திற்கு ρ எனக் கொண்டால் கம்பியின் பொருண்மை $\int dm$ என்பது $\pi a \rho$ என வரும். [வேண்டுமானல் $\int_{-a}^{a} \frac{ds}{dx}\, dx$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \left(a \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)_{-a}^{a}$$

$$= a \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{a\pi}{2} \right) = \pi a$$ என சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.]

$$\text{எனவே, } \bar{y} = \int_{-a}^{a} y \frac{a}{y}\, dx\, \rho \div \pi a \rho$$

$$= \left(ax \right)_{-a}^{a} \div \pi a\rho$$

$$= \frac{2a}{\pi} \text{ என வரும்.}$$

∴ அரை வட்டக் கம்பியின் பு. மையம், வரம்பிடும் விட்ட மையத்தில் வரையக்கூடிய செங்கோட்டின் மேல் $\frac{2a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்க வேண்டுமானல்,

$$\bar{x} = \int_{-a}^{a} x \frac{a}{y} dx \div \pi a$$

= 0 என சரி பார்க்கலாம்.

$$\int_{-a}^{a} x \frac{a}{y} dx = a \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \left[-\sqrt{a^2 - x^2} \right]_{-a}^{a}$$

= 0 என வரும்.

ஆனல் சமச்சீர் நிலையையொட்டியே $\bar{x} = 0$ எனக் கூறுவதும் பொருந்தும்.

ஆனல், போலார் ஆயத் தொலை முறைகொண்டு மேற் கூறப்பட்ட முடிவை மிக எளிதில் காணலாம்.

10-8.4.1. போலார் ஆயத் தொலை முறை

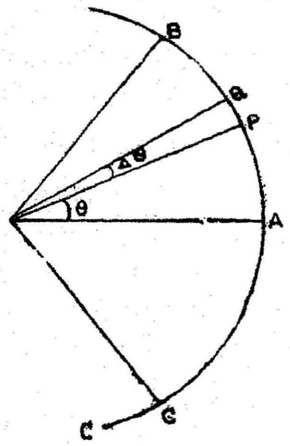
a ஆரமுள்ள ஒரு வட்ட வரையின்மேல், 2α மையக் கோணம் தாங்கும் ஒரு சீரான வில் (மெல்லிய கம்பி உருவம்) எடுத்துக் கொள்வோம். (படம் 10-8.4·1)-ல்

$\angle AOB = \alpha = \angle AOC$

$\therefore \angle COB = 2\alpha$

$OA = OB = OC = a$ (ஆரம்)

இரு மிக நெருங்கிய புள்ளிகள் P, Q என வட்ட வரையின் மேல் எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 10-8.4.1.

$\angle AOP = \theta$ எனவும்,

$\angle POQ = \Delta\theta$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால், நுண்வில் $PQ = a\Delta\theta$ ஆகும்.

அதன் பொருண்மை $a\,\Delta\theta\rho$

அதன் எடை $a\,\Delta\theta\,\rho g$

அதன் பு. மையம் PQ-ன் மையம்.

OAஐ x அச்சென எடுத்துக் கொண்டால், PQ-ன் பு. மைய ஆயத் தொலைகள் $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$. BC என்ற வில்லானது x அச்சையொட்டி சமச் சீருடையதாயிருப்பதால், OA-ன் மேல்தான் பு. மையமிருக்கும்; அதாவது $\bar{y}=0$. PQ என்ற வில்லின் பு. மையம் $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\text{எனவே } \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a\cos\theta\; a\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a\,d\theta}$$

$$= a^2\left(\sin\theta\right)_{-\alpha}^{\alpha} \div a\left(\theta\right)_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\bar{y} = \int_{-\alpha}^{\alpha} a\sin\theta .\ a\,d\theta \div 2a\alpha$$

$$= \frac{a^2\left(-\cos\theta\right)_{-\alpha}^{\alpha}}{2a\alpha} = 0 \text{ என வருவதைக் காண்க.}$$

ஆனால், இவ்வாருகத் தொகை கண்டுதான் $\bar{y} = 0$ எனக் கூற வேண்டுவதில்லை. x அச்சுக்குச் சமச் சீருடையதாதலால் $\bar{y} = 0$ என்று கூறுவதே போதுமானது.

குறிப்பு 1: ஒரு வட்ட நாற்கூறு வரையெனின் $\alpha = \frac{\pi}{4}$

எனக்கொண்டு $\bar{x} = \dfrac{a \sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$

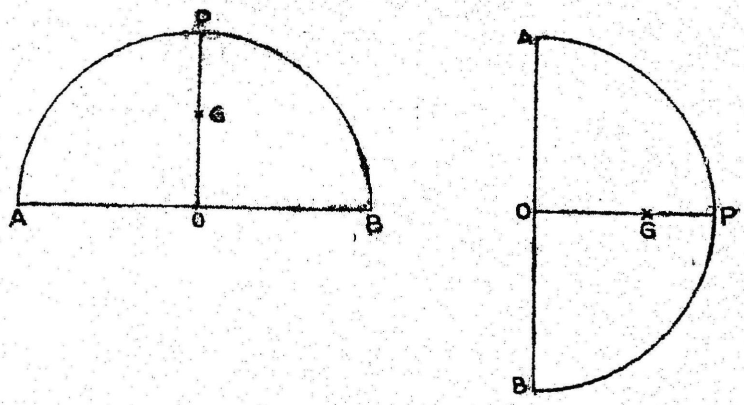
$= \dfrac{4\,a}{\sqrt{2}.\,\pi}$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு 2: ஒரு அரை வட்டவரையெனின் $\alpha = \frac{\pi}{2}$

எனக்கொண்டு $\bar{x} = \dfrac{a \sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{2a}{\pi}$ என எழுதலாம்.

[படம் 10–8.4.1. (1) காண்க.]



படம் 10-8.4.1. (1)

$OG = \dfrac{2a}{\pi}$ வகையில் படத்தில் காட்டியபடி பு. மையம்

அமையும். AB வில்லோடு சேர்ந்ததல்ல; AB மட்டுமே நாம் பு. மையம் காணும் வில்லாகும்.

10–8.5. சீரான பொருள்களாயல்லாமல், அதாவது ஒரே அடர்த்தியுள்ள பொருள்களாயல்லாமல், பொருளின் அடர்த்தி ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி மாறி மாறியிருக்குமானுல், அவ்விதப் பொருள்களின் பு. மையம் காணும் முறை பார்ப்போம். இங்குப் பழைய முறையையே நாம் கையாண்டபோதிலும், ρ ஒரு மாறிலியாகக்கொள்ளாமல்கொடுக்கப்பட்ட விதிப்படிஎடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்; அதாவது $\rho = \phi(x)$ போன்ற தொடர்பு கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். எனவே, ρ தோன்றுமிடங்களில் $\phi(x)$ போன்ற ஒரு சார்பை ஈடுசெய்து பின்னர் குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள் தொகை கண்டு பு. மையம் பெறவேண்டும். இங்கு $\bar{x}$, $\bar{y}$ என்பவற்றைக் காணும் வாய்பாடுகளில் மேல் தொகையில் தோன்றும் ρ ஐயும், கீழ்த் தொகையில் தோன்றும் ρ ஐயும் ஒன்றுக்கொன்று சாதாரண வகுத்தலில் செய்வதுபோல் நீக்கிவிட முடியாது; ஆகவே கூடாது.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் மேற்கூறிய கருத்துகள் பயன்படுத்தப்படுவதைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஓர் அரை விட்டத் தகட்டின் அடர்த்தி விட்டத்திலிருந்துள்ள தூரத்திற்கு நேர் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அதன் பு. மையம் காண்க.

(படம் 10–8.5.1.)–ல் காட்டியபடி AB–க்கு y தூரத்திலுள்ள $PQRS$ என்ற ஒரு நுண் பரப்பை எடுத்துக் கொள்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ எனவும் கொள்க.

$PQRS$–ன் பொருண்மை $= 2x\ \Delta y\ Ky$

K ஒரு மாறிலி; அதன் பு. மையம் (O, y)

எனவே, பொருண்மை $= \sum 2\ K\ x\ y\ \Delta y$

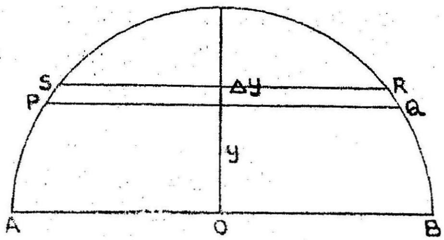
$$= \int_{y=0}^{y=a} 2K\ xy\, dy$$

$$= 2K \int_0^a y\sqrt{a^2 - y^2}\ dy$$

$$= \frac{2K}{2}\left[-\tfrac{2}{3}\,(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{2\,K\,a^3}{3}$$

$\bar{x} = 0$ என உடனடியாக எழுதலாம்; ஏனெனில் தகடு y அச்சையொட்டி சமச் சீருடையது.



படம் 10-8.5.1.

$$\bar{y} = \int_0^a 2\,k\,xy\,dy\,.\,y \div \tfrac{2}{3}\,a^3\,K$$

$$= 2K \int_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2}\,dy \div \tfrac{2}{3}\,a^3\,K$$

$y = a\sin\theta$ எனக் கொண்டால்,

$dy = a\cos\theta\,d\theta$

$y^2\sqrt{a^2-y^2} = a^3\sin^2\theta\cos\theta$

தொகை எல்லைகள் (1) முதல் $\frac{\pi}{2}$ எனவரும்.

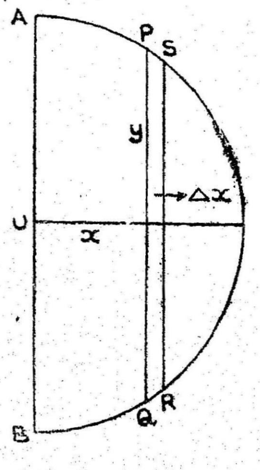
$$\therefore \bar{y} = 2\,K\int_0^{\pi/2} a^4\sin^2\theta\,\cos^2\theta\,d\theta \div \tfrac{2}{3}\,a^3K$$

மேல் தொகை $= 2K\, a^4 \;\dfrac{1.1}{4.2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi a^4 K}{8}$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\pi\, a^4}{8 \times \frac{2}{3}a^3} = \frac{3\,\pi\, a}{16}$$

$\left(0, \dfrac{3\,\pi\, a}{15}\right)$ என்பது பு. மையமாகும்.

அதாவது அவ்விதத் தகட்டின் பு. மையம் விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக மையத்திலிருந்து தகட்டில் வரையப்படும் கோட்டில், விட்டத்திலிருந்து $\dfrac{3\,\pi\, a}{16}$ தூரத்திலிருக்கும்.



படம் 10-8.5.1.1.

தகட்டினை, (படம் 10-8.5.1.1.)-ல் காட்டியுள்ளபடியும் கொண்டு பு. மையம் காணலாம்.

நுண் பொருண்மை $2\, y \,\Delta\, x\;\; K\, x$ எனவும்,

$\bar{y} = 0$ எனவும்,

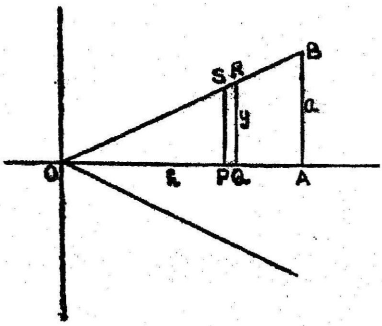
$$x = \frac{\int_{x=0}^{x=a} 2y\, x^2 K\, dx}{\int_0^a 2\, yx\, K\, dx}$$

$= \dfrac{3\,\pi\, a}{16}$ எனவும் வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : அடிமட்ட அரை விட்டம் a; h உயரமுள்ள ஒரு பொள்ளல் கூம்பின் புறப்பரப்பு அடர்த்தி கூம்பின் உச்சியிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்கு இருபடி நேர் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அப்பரப்பின் பு. மையம் காண்க.

இந்தக் கூம்புத் திண்மத்தைப் பிறப்பிக்கும் முறை முன்னர் விளக்கப்பட்டிருக்கிறது. (படம் 10–8.5.2.)-ல் காட்டியபடி

OAB என்ற செங்கோண முக்கோணம் x அச்சை ஒரு முறை சுற்றினால் ஒரு திண்மக் கூம்பு பிறக்கும்.



படம் 10-8.5.2.

OB-ன் சமன்பாடு $y = \frac{a}{h}x$

நுண் பரப்பு $= 2\pi y \,\Delta s$

நுண் பொருண்மை $= 2\pi y \,\Delta s.\, Kx^2$ (K மாறிலி) தொகை எல்லைகள் $x=0$ முதல் $x=h$ வரை.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{h^2+a^2}{h^2}} = \frac{l}{h}$$

எனக் கொள்வோம்; l என்பது கூம்பின் சாய்வுயரமாகும்.

பு. மையம் $(x, 0)$

எனவே, பொருண்மை $= \sum \Delta m$

$$= \int_0^h 2\pi y\, K\, x^2\, ds$$

$$= 2\pi K \int_0^h \frac{a}{h} x^3 \frac{ds}{dx} dx$$

$$=2\pi K \frac{a}{h}\int_0^h x^3 \frac{l}{h}\,dx$$

$$=2\pi K \frac{al}{h^2}\left(\frac{h^4}{4}\right)$$

$$=\pi K \frac{a\,l\,h^2}{2}$$

$$\bar{x}=\int_0^h 2\pi y\,ds\,K x^2 x \div \pi K a l \frac{h^2}{2}$$

மேலெண்ணின் தொகை $= 2\pi K \int_0^h x^3 \frac{a}{h} x \frac{l}{h}\,dx$

$$=2\pi K \frac{al}{h^2}\cdot\frac{h^5}{5}$$

$$=\pi K a \frac{l h^3}{5}$$

$$\therefore \bar{x}=2\pi K \frac{a\,l\,h^3}{5}\cdot\frac{2}{\pi K a l h^2}$$

$$=\frac{4h}{5}$$

அதாவது பு. மையம் x அச்சின்மேல், ஆய ஆதியிலிருந்து $\frac{4h}{5}$ தூரத்தில், அல்லது அடித்தள மட்டத்திலிருந்து $\frac{h}{5}$ தூரத்தில் இருக்கும்.

10–9 பலவகையான எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1: a, b என்ற ஆரமுடைய இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று உள்ளே தொட்டுக் கொண்டிருக்கின்றன. அவற்றுக்கிடைப்பட்ட திண்மத்தின் பு. மையம் காண்க.

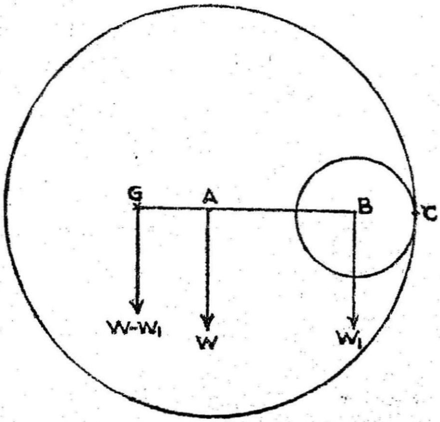
(படம் 10–9.1. காண்க). A என்பது a என்ற ஆரமுடைய பெரிய கோளம்.

அதன் எடை $= \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g$ (ρ அடர்த்தி)

B என்பது b என்ற ஆரமுடைய சிறிய கோளம், முதற் கோளத்தை C-ல் தொடுகிறது.

அதன் எடை $= \frac{4}{3} \pi b^3 \rho g$

இடைப்பட்ட திண்ம எடை $= \frac{4}{3} \pi \rho g (a^3 - b^3)$



படம் 10-9.1.

G-ல் அப் பகுதியின் பு. மைய மிருக்குமானுல்

$$\frac{4}{3} \pi \rho g (a^3 - b^3) GA = \frac{4}{3} \pi \rho g b^3 AB$$

$$= \frac{4}{3} \pi \rho g b^3 (a - b)$$

$$(a^3 - b^3) GA = b^3 (a - b)$$

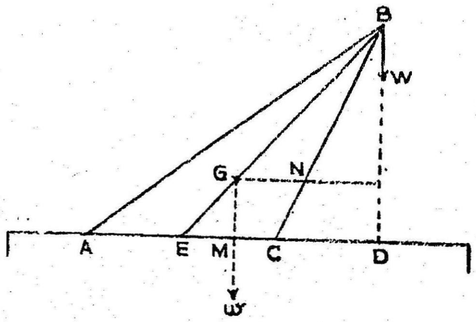
$$\therefore \quad GA = \frac{b^3 (a - b)}{a^3 - b^3}$$

$$= \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ABC என்ற ஒரு முக்கோணத் தகட்டில், $\angle C$ ஒரு விரிகோணம். ஒரு மேசை மேல் AC பொருத்தப்பட்டு, அம் முக்கோணம் குத்து தளத்தில் நிற்கிறது. B-லிருந்து எந்த மீச்சிறு எடையைத் தொங்க விட்டால் அம் முக்கோணம் கவிழுமெனக் காண்க.

முக்கோணத்தின் எடை ω எனவும், முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் மரபுப்படி a, b, c எனவும் கொள்க.

(படம் 10-9·2 காண்க). முக்கோணம் ABC-ன் பு. மையம் G எனக் கொள்க. G-ல் ω-ம், B-ல் W-ம் செயற்படட்டும். முக்கோணம் கவிழப் போகும் தருணத்தில் Cஐ மையங் கொண்டு கவிழத் தொடங்கும்.



படம் 10.9.2.

GM, BD என்பவை குத்துக் கோடுகள், ω, W முறையே இயங்கும் திசைகளாகும். ω கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. W என்பது ஒரு மாறி (Variable) எனக் கொள்வோம்.

Cஐ ஒட்டி, W-ன் திருப்புத் திறன் $W.CD$

Cஐ ஒட்டி, ω-ன் திருப்புத் திறன் $\omega.MC$

$\omega.M.C > W.CD$ ஆக இருக்கும் வரை முக்கோணம் கவிழாது.

$\omega.MC = W.CD$ ஆகும் போது, கவிழுந் தருணம். இந்த சமன்பாட்டுக்குரிய W-ன் மதிப்பே நாம் கணக்கின்படி காண வேண்டிய எடை. முக்கோணம் ABC-ல்

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$ என நமக்குத் தெரியும்.

$$CD = BC \cos (180 - C)$$

$$= -a \cos C$$

$$= -a \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

$$= \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2b}$$

$$EC = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \; ED = \frac{b}{2} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2b}$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

$$EM = \tfrac{1}{3} ED \quad \left(\because \frac{EM}{MD} = \frac{EG}{GB} = \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \; EM = \frac{c^2 - a^2}{6b}$$

$$\therefore \; MC = \frac{b}{2} - \frac{c^2 - a^2}{6b}$$

$$= \frac{3b^2 - c^2 + a^2}{6b}$$

எனவே, $\omega . MC = W \cdot CD$ என்ற சமன்பாடு உண்மையாக,

$$W = \omega \frac{MC}{CD}$$

$$= \omega \frac{(3b^2 - c^2 + a^2)}{6b} \cdot \frac{2b}{(c^2 - a^2 - b^2)}$$

$$= \tfrac{1}{3} \, \omega \left(\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2}\right)$$

எனப் பெறப்படும்.

W இதற்குக் குறைவா யிருக்கும் வரை,

$\omega.MC > W.CD$ என்பது பொருத்தமாகி முக்கோணம் கவிழாது.

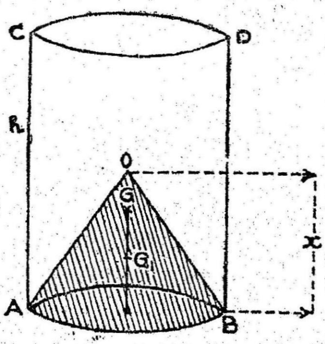
W இதற்கு மேற்படும் போது,

$\omega.MC < W.CD$ என்பது பொருத்தமாகி முக்கோணம் கவிழ்ந்து விடும்.

$\omega.MC = W.CD$ என்பது பொருந்தும்போதுதான் முக்கோணம் கவிழும் தருவாய் ஆகும். எனவே, W-ன் மீச்சிறு மதிப்பு

$$= \frac{1}{3}\,\omega\left(\frac{a^2 + 3\,b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஓர் உருளைத் திண்மத்திலிருந்து உருளையின் வட்ட தளம் கொண்டுள்ள ஒரு கூம்பு குடையப் பட்ட பின்பு, கூம்பின் முனைப் பகுதி எஞ்சிய திண்மத்தின் பு. மையமாக இருக்குமானால், குடைந்தெடுக்கப்பட்ட கூம்பின் உயரம் முழு உருளையின் உயரத்திற்கு எந்த விகிதத்திலிருக்கும்?



படம் 10-9.3.

(படம் 10–9.3. காண்க.) a ஆரம், h உயரம் உள்ள உருளை யினின்று, a ஆரம் x உயரம் உள்ள ஒரு கூம்பு குடைந்தெடுக்கப் பட்டுவிட்டது. படத்தில் காட்டியபடி, எஞ்சிய $AOBDCA$ என்ற பகுதியின் பு. மையம் O-ல் உள்ளதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக் கிறது.

உருளையின் எடை: $\pi a^2 h\rho g$; $\frac{h}{2}$ உயரத்தில் AB-ன் மையக் குத்துக் கோட்டின்மேல் G-ல் செயற்படும்.

கூம்பின் எடை: $\frac{1}{3}\pi a^2 x\rho g$; $\frac{x}{4}$ உயரத்தில் AB-ன் மையக் குத்துக் கோட்டின்மேல் G_1-ல் செயற்படும்.

எஞ்சிய எடை: $\pi a^2 \rho g \ (h - \frac{1}{3} x)$; x உயரத்தில் AB-ன் மையக் குத்துக் கோட்டின்மேல் O-ல் செயற்படுகிறதெனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, O ஐ ஒட்டி, எஞ்சிய எடையின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும்.

O ஐ ஒட்டி, $\pi a^2 h \rho g$ — ன் திருப்புத்திறன்

$$\pi a^2 h \rho g \times OG = \pi a^2 h \rho g \left(x - \frac{x}{2} \right)$$

O ஐ ஒட்டி, $\frac{1}{3}\pi a^2 x \rho g$–ன் திருப்புத்திறன்

$$\frac{1}{3}\pi a^2 x \rho g \times OG_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 x \rho g \left(x - \frac{x}{4} \right)$$

வாரிக்ஞன் தேற்றப்படி,

$$0 + \frac{1}{3}\pi a^2 x \rho g \left(x - \frac{x}{4} \right) = \pi a^2 h \rho g \left(x - \frac{h}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{3}{4} x \cdot \frac{1}{3} = h \left(x - \frac{h}{2} \right)$$

$$\frac{1}{4} x^2 = h \frac{(2x - h)}{2}$$

$$2x^2 = 4(2x - h)h$$

$$2x^2 - 8xh + 4h^2 = 0$$

$$x = \frac{8h \pm \sqrt{64h^2 - 32h^2}}{4}$$

$$= \frac{8h \pm 4\sqrt{2}h}{4}$$

$$= 2h \pm \sqrt{2}h$$

$(2h + \sqrt{2}h)$ என்ற உயரம் செல்லாது.

$$\text{எனவே } x = h(2 - \sqrt{2})$$

$$= 0.59\, h \text{ (ஏறக்குறைய)}$$

மாற்று முறையாக, பகுதிப் பொருளின் பு. மையத் தேற்றம் .... கொண்டு, சமன்பாடு எழுதினல்,

$\frac{1}{3}\pi a^2 x \rho g \times G_1 G = \pi a^2 \rho g (h - \frac{1}{3}x) \times OG$ என்ற சமன் பாடு வரும்.

$$\therefore \quad x\left(\frac{h}{2} - \frac{x}{4}\right) = 3\left(h - \frac{1}{3}x\right)\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

$$3x^2 - 12hx + 6h^2 = 0$$

$$x = \frac{12h \pm \sqrt{144h^2 - 72h^2}}{6}$$

$$= \frac{12h \pm 6\sqrt{2}\,h}{6}$$

$= 2h \pm \sqrt{2}\,h$ என வருவதைக் காண்க.

செல்லுபடியாகும் தீர்வு $x = 2h - \sqrt{2}\,h$.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஓர் அரைக் கோள திண்மத்தின் அடர்த்தி, வட்ட அடித்தளத்திலிருக்கும் தூரத்தின் n படிக்கு $(n \geq 0)$ நேர்த்தகவுப் பொருத்தமுடையது. அதன் புவிமையம் காண்க. $n = 0$ ஆனல், புவிமையம் எங்குள்ளது?

(படம் 10–9.4. காண்க.) வட்ட ஆரம் a எனக்கொள்க. வட்டச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ எனக் கொள்க.

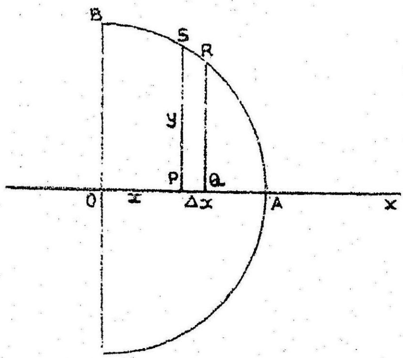
PQRS என்ற பகுதி x — அச்சைச் சுழன்று வருவதால், பிறப்பிக்கப்படும் நுண் திண்மத்தின் எடை

$$= \pi y^2 \Delta x . K x^n$$

$$= \pi (a^2 - x^2) K x^n \Delta x$$

அதன் புவிமையம் (x, O)

X அச்சையொட்டி, அத்திண்மம் சமச்சீருடையதாயிருக்குமாதலால் $\bar{y} = 0$.



படம் 10-9.4.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) K x^n x \, dx}{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) K x^n \, dx}$$

$$= \frac{2 \pi K \cdot a^{n+4} X (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4) 2 \pi K a^{n+3}}$$

$$= \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)} a$$ என வரும்.

$n = 0$ ஆனால், அதாவது அடர்த்தி சீராகவிருப்பின், $\bar{x} = \frac{3}{8} a$ எனக் கிடைக்கும். (10-8.2. எ. கா. 2 காண்க.)

பயிற்சி 10

1. ஒரு சம சதுர முனைகளில் 1,2,3,4 கி. கிராம் எடைகள் தொங்க விடப் படுகின்றன. இவற்றின் பு. மையம் சதுர மையத்திலிருந்து சதுர பக்கத்தின் ஐந்திலொரு பங்கு தூரத்திலுள்ள தென நிறுவுக.

2. ABC. என்பது 3 கி. கிராம் எடையுள்ள ஒரு சீரான முக்கோணத் தகடு. முக்கோண முனைகளில் 2, 3, 5 கி. கிராம் எடைகளும் தொங்கவிடப் பட்டிருக்கின்றன. பு. மையம் காண்க.

3. மேலே கூறிய கணக்கு 2–ல், கோண முனைகளில் 2, 2, 11 கி. கிராம் எடைகள் தொங்க விட்டால், பு. மையம் GC – ன் மையத்திலிருக்கிற தென நிறுவுக.

4. $(1, 1)$ $(1, -1)$ $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ என்ற புள்ளிகளில் முறையே P, $3P$, $5P$, $7P$ என்ற எடைகள் வைக்கப் பட்டால், இவ் வமைப்பின் பு. மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் காண்க.

5. ABC என்ற ஒரு சீரான முக்கோணத் தகட்டில் $DE \parallel BC$ என வரையப்பட்டிருக்கிறது. முக்கோணம் ADE–ன் பரப்பு, முழு முக்கோணப் பரப்பில் நான்கிலொரு பாகம். எஞ்சியுள்ள தகட்டின் பு. மையம் காண்க.

6. ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டில் $DE \parallel BC$ என ஒரு கோடு வரையப்பட்டு ADE என்ற முக்கோணம் வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சியிருக்கும் சரிவகப் பரப்பின் பு. மையம், BC – விருந்து $\dfrac{b^2+ab-2a^2}{3(a+b)}$ தூரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக. இங்கு A–விருந்து DE உள்ள தூரம் a; BC உள்ள தூரம் b எனக் கொள்ளப் படுகிறது.

குறிப்பு: சென்ற கணக்கு 5, இக் கணக்கின் ஒரு சிறப்பான எடுத்துக்காட்டு; ஈடு செய்து சரிபார்க்க.

7. ABC என்பது ஒரு சம அடர்த்தி பெற்ற ஒரு சம பக்க முக்கோணத் தகடு; G என்பது அதன் பு. மையம். GBC என்ற முக்கோணத் தகட்டினை நீக்கி விட்டால், எஞ்சியிருக்கும் பகுதியின் பு. மையம் காண்க. (பக்கம் a எனக் கொள்க.)

8. ஒரு சமச்சீரான கம்பி (நீளம் $2a$) ஒரு சமசதுரத்தின் இரண்டு அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக அமையும் வகையில் வளைக்கப் பட்டிருக்கிறது. இந்த அமைப்பின் பு. மையம் வளைக்கப்பட்ட சதுர முனையிலிருந்து $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ தூரத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

9. ஒரு சமச் சீரான கம்பி (நீளம் $a+b+c$) ஒரு முக்கோணமாக வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது; அதன் பக்கங்கள் முறையே a, b c. மரபுப்படி அம் முக்கோணத்தை ABC எனக் கொண்டால், அம் முக்கோணத்தின் பு. மையமும், முறையே A, B, C என்ற புள்ளிகளில் $(b+c)\rho$, $(c+a)\rho$, $(a+b)\rho$ என்ற எடைகள் உள்ள அமைப்பின் பு. மையமும் ஒன்றேயென நிறுவுக. ρ என்பது ஒரு மாறிலி.

10. 24 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பி 6, 8, 10 செ. மீ. பக்கங்களுள்ள ஒரு முக்கோணமாக வளைக்கப் படுகிறது. முக்கோண உச்சிகளில் ω_1, ω_2, ω_3, என்ற எடைகள் வைக்கப்படுகின்றன. பழைய முக்கோணத்தின் பு. மையமும் எடைகள் வைத்த அமைப்பின் பு. மையமும் ஒன்றேயானால் $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 9 : 8 : 7$ என நிறுவுக.

11. 30 செ. மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சம பக்க முக்கோணத் தகட்டிலிருந்து, ஒரு முனையில் 10 செ. மீ. பக்கமுள்ள சம பக்க முக்கோணம் வெட்டி யெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய தகட்டின் பு. மையம் முதல் தகட்டின் பு. மையத்திலிருந்து $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ செ. மீ. தூரத்தில் உள்ளதென நிறுவுக. (கணக்கு 5–ல் கண்ட முடிவைப் பயன் படுத்த முடியுமா வெனச் சோதிக்கவும்.)

12. ஒரு வட்ட தள நேர்க் கூம்பினின்று, எவ்வளவு பெரிய கோளத்தை வெட்டியெடுக்க முடியுமோ, அது வெட்டியெடுக்கப் படுகிறது. நேர்க்கூம்பின் உச்சி அரைக்கோணம் 30°. எஞ்சிய பகுதியின் பு. மையம் கூம்பச்சை 11 : 20 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறதென நிறுவுக.

13. ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டினின்று, அதன் உள் வட்டப் பகுதி வெட்டி யெடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியின் பு. மையம், BC என்ற பக்கத்திலிருந்து $\frac{S}{3as} \cdot \frac{2s^3 - 3\pi aS}{s^2 - \pi S}$ தூரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக. (S—பரப்பு; s — அரைச்சுற்றளவு)

14. ஒரு வட்ட தள நேர்க்கூம்புத் திண்மம், உயரம் h; அடி மட்டத்திலிருந்து $\frac{h}{2}$ உயரத்தில் ஒரு தளம், வட்ட தளத்திற்கு இணையாகி, கூம்பினை வெட்டுகிறது. வெட்டப் பட்ட கூம்புப் பகுதியின் பு. மையம் அடித்தளத்திலிருந்து அச்சின்மேல் $\frac{11}{56}$ உயரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக.

15. r ஆரமும், h உயரமும் கொண்ட ஓர் உருளைத் திண்மத்தின் வட்ட முகத்தின்மேல், அதே ஆரமும், அதே உயரமும் உள்ள ஒரு கூம்புத் திண்மம் நிற்கிறது. இவ்விணைப்பின் பு. மையம், பொது அச்சின் மேல், அடித் தளத்திலிருந்து $\frac{11}{16}h$ உயரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக.

16. மேற் கூறிய உருவத்திலுள்ள ஒரு திண்மத்தில் உருளையின் உயரம் b, கூம்பின் உயரம் a. அவ்விணைப்பின் பு. மையம் இரண்டிற்கும் பொதுவான வட்ட தளத்தில், அதாவது அடித் தளத்திலிருந்து b உயரத்தில் பொது அச்சின்மேல் இருக்கிறதெனில் $a=b\sqrt{6}$ என நிறுவுக.

17. ஓர் உருளை வடிவத்திலுள்ள தகரக் குவளையின்மேல் பக்கம் மூடியில்லாமல் அடிப்பாகம் மட்டும் மூடப் பட்டிருக்கிறது. ஆரம் a, உயரம் h ஆனால், அதன் பு. மையம், அடித்தளத்திலிருந்து $\frac{h^2}{a+2h}$ உயரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக.

18. ஒரு குழிவான கூம்பு வடிவக் குவளை மேல் மூடியோடு இருக்கிறது. இம் முழுப் பரப்பின் பு. மையமானது அது ஒரு கூம்புத் திண்ம மாயிருப்பின் அதன் பு. மையம் எங்கிருக்குமோ அதேயிடத்தில் இருக்குமானால், அக்கூம்பின் உச்சிக் கோணம் $2\sin^{-1}(\frac{1}{3})$ என நிறுவுக.

19. ஒரு நாற்கரத் தகடு $ABCD$-ன் பு. மையம் A-ல் இருக்குமானால், BD-லிருந்து A, C உள்ள தூரங்கள் $1:2$ என்ற விகிதத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

20. ஒரு நாற்கரத் தகட்டின் முனைகள் A, B, C, D; மூலைவிட்டங்கள் வெட்டுமிடம் E. அந்தத் தகடுள்ள தளத்தில் ஏதாவ

தொரு நேர்க்கோட்டிலிருந்து A, B, C, D, E - ன் தூரங்கள் முறையே x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ஆனுல், அத்தகட்டின் பு. மையம் அதே நேர்க்கோட்டிலிருந்து $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3+x_4-x_5)$ தூரத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

21. ஒரு வட்டத் தகட்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரமுள்ள வட்டத் துண்டு வெட்டியெடுக்கப் படுகிறது. எஞ்சிய தகட்டின் பு. மையம், ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்திற்குள்ளேயே இருக்குமென நிறுவுக.

22. ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டை, ஒரு நாண் இரு பகுதிகளாக வெட்டுகிறது; அந்த நாண் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2α ஆனுல், அவ்விரு பகுதிகளின் பு. மையங்கள் வட்டத் துண்டுகளின் வில் மையங்களையும், வட்ட மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டின்மேல், $\frac{4}{3}a.\ \frac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha}$, $\frac{4}{3}a.\ \frac{\sin 3\alpha}{(2\pi-2\alpha+\sin 2\alpha)}$ என்ற தூரங்களில் இருக்குமென நிறுவுக. $\underline{a}$ என்பது வட்டத்தின் ஆரமெனவும், α என்பது ஆரையன் அளவில் உள்ளதெனவும் கொள்க. சிறப்பாக, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ எனக் கொண்டு, அரை வட்டத் தகடுகளின் பு. மையம் பெறப் படுகிறதாவெனச் சரிபார்க்க. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ என எடுத்துக் கொண்டால் என்ன கிடைக்குமெனக் கூறுக.

23. செவ்வக அமைப்பிலுள்ள ஒரு திறந்த பெட்டியின் வெளிநீளம் 60 செ.மீ. அகலம் 50 செ.மீ. உயரம் 45 செ.மீ; பலகை கனம் 5 செ.மீ. இதன் பு.மையம் காண்க.

24. நான்கு சமநீள சம எடையுள்ள கம்பிகள் ஒரு அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த நான்கு பக்கங்களாக அமைந்து $ABCDE$ என்ற ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளாக உள்ளது. அது A என்ற ஒரு முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. அசைவற்ற நிலையில் AB என்ற கோடு, செங்குத்துக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{1}(\frac{1}{7}\sqrt{3})$ என நிறுவுக.

25. ஒரு சமச் சீரானகம்பி ஒரு சம சதுரத்தின் மூன்று அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகும் வகையில் வளைக்கப்பட்டு ஒரு முனையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டால், நடுப்பக்கம் கிடைக்கோட்டிற்கு $\tan^{1}(\frac{3}{4})$ என்ற அளவு சாய்ந்திருக்கிறதென நிறுவுக.

26. இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் செம் பக்கத்தின் மேல், அதை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரை வட்டமும் சேர்ந்த ஒரு சீரான தகடு இருக்கிறது. செம்பக்கத் தின் ஒரு முனையிலிருந்து அத்தகட்டினைத் தொங்கவிட்டால் முக் கோணத்தின் செம்பக்கம் கிடைக் கோட்டிற்கு $\cot^{-1}\left(\frac{2}{3(2+\pi)}\right)$ அளவு சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக.

27. ஒரு கூம்புத்திண்மத்தின் அடிவட்ட ஆரம் a; உயரம் h. ஒரு கயிறு கொண்டு கூம்பின் உச்சியும், அடிவட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியும் கட்டப்பட்டு, அக் கயிறு ஒரு மூளைக் குச்சியில் மாட்டப்பட்டு அத்திண்மம் குத்து தளத்தில் சுயேச்சை யாகத் தொங்குகிறது. கூம்பின் அச்சு கிடைக்கோட்டில் அமையுமாறு அக் கூம்பு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கிறது. கயிறு நீளம் $\sqrt{h^2+4a^2}$ என நிறுவுக.

28. ஒரு செங்கோண முக்கோணத் தகடு செம்பக்கத்தின் மையப் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப் படுகிறது. முக்கோணத் தின் பக்கங்கள் a, b, c ஆனால் செம்பக்கம் செங்குத்துக் கோட் டிற்கு $\sin^{-1}\left(\frac{2ab}{c^2}\right)$ அளவு சாய்ந்திருக்கிறதென நிறுவுக.

29. ஒரு சமசதுரத்தகடு $ACBD$-ல் ABC என்ற முக் கோணப் பகுதிமேல் மொத்தமாக சாயம் பூசப்பட்டிருக்கிறது. சாயத்தின் எடை, தகட்டின் எடையில் $\frac{1}{n}$ பங்கு இருக்கிறது. A என்ற மூலையிலிருந்து அத்தகடு தொங்க விடப்பட்டால், AC-க் கும் செங்குத்துக் கோட்டிற்கு மிடைப்பட்ட கோணம் $\cot^{-1}(3n+3)$ என நிறுவுக.

30. ACB என்ற ஒரு சீரான கம்பி, A-ல் வளைக் கப்பட்டு ABC என்ற முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களாக இருக்கின்றன. A-விருந்து அதை சுயேச்சையாகத் தொங்க விட்டால், AB-க்கும் செங்கோட்டுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் $\cot^{-1}\left(\frac{b^2\cos A+c^2}{b^2\sin A}\right)$ என நிறுவுக

31. ஒரு நீள் வட்டத்தின் முதல் நாற்கூறு பகுதியிலுள்ள பரப்பின் பு·மையம், மரபுப்படி $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$ என்ற இடத்தில் உள்ளதென நிறுவுக. (a, b — நீள்வட்டத்தின் பாதி அச்சுகள்.)

32. ஒரு கூம்புத்திண்மம், அச்சுவழியாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தால் இருசம கூறுகளாகப்பிரிக்கப் படுகிறது. ஒருபாதியின் பு.மையம், அச்சிலிருந்து $\frac{a}{\pi}$ தூரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக (a என்பது கூம்பின் அடித்தள வட்ட ஆரம்)

33. ஒரு கிண்ணம் வெளியே a ஆரமுள்ள அரைக்கோளமாகவும், உள்ளே b ஆரமுள்ள அரைக்கோளமாகவும், உள்ளது. கோளமையத்திலிருந்து, இக் கிண்ணத்தின் பு.மையம் $\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ ஆழத்தில் இருக்கிறதென நிறுவுக.

34. $y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்பது ஒருவளைவரைச்சமன்பாடு (சங்கிலியம்). $(0,0)$ இலிருந்து (a, b) வரையில் வளைவரை, x, y, அச்சுகளால் வரம்பிடப்பட்ட பரப்பின் பு.மையம் $\bar{x} = \frac{as-c(b-c)}{s}$, $\bar{y} = \frac{bs+ac}{2s}$ என்ற ஆயத்தொலைகள் பெற்றபுள்ளியில் உள்ளதென நிறுவுக. [இங்கு s என்பது $(0,0)$ முதல் (a,b) வரையிலுள்ள வில்லின் நீளமாகும்.]

35. $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ என்ற வளைவரையில் ஒரு வளையப் பரப்பின் பு. மையம் $\left[\frac{a}{3} \cdot \frac{3\pi-8}{4-\pi}, 0\right]$ என நிறுவுக.

36. $x = 0$ முதல் $x = \pi$ வரை $y = \sin x$ என்ற வளைவரைப் பரப்பின் பு. மையம் $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ என நிறுவுக.

37. ஒரு சமச் சீரான கம்பி, ஒரு வட்ட நாற் கூறாக வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது; வரம்பிடும் ஆரங்களும் கம்பியைச் சேர்ந்ததே. அதன் பு. மையம் வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{3\sqrt{2}\,a}{\pi+4}$ தூரத்திலிருக்கிறதென நிறுவுக.

38. $x^2 = 4y$ என்ற வளை வரைக்கும் $y = x$ என்ற கோட்டிற்கும் பொதுவான பரப்பின் பு. மையம் $(2, \frac{8}{5})$ என நிறுவுக.

39. ஒரு நீள்வட்ட நாற் கூறினை y அச்சு மையங் கொண்டு சுழற்றினால் பெறப்படும் திண்மத்தின் பு. மையம் $\left(0, \frac{3}{8} b\right)$ என நிறுவுக. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என அந் நீள் வட்டச் சமன்பாட்டினைக் கொள்க.

40. ஓர் அரைக்கோளத் திண்மத்தின் அடர்த்தி, மையத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தின் n படிக்கு நேர் தகவுப் பொருத்தமுடையதெனின், அதன் பு. மையம், அடிவட்ட மையத்திருந்து வரையப்படும் செங்குத் தாரத்தின்மேல் $\frac{1}{2}\left(\frac{n+3}{n+4}\right)a$ தூரத்திலிருக்குமென நிறுவுக. $n=0$ என்பதற்குரிய பொருளை விளக்குக. $n=-2$ ஆனால் அதாவது, அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி, மையத்திலிருந்து உள்ள தூரத்தின் இரு படிக்கு நேர்மாறு தகவுப் பொருத்தமுடையதெனில் பு. மைய உயரம் $\frac{1}{4}a$ என நிறுவுக. (கோளவிட்டம் a எனக் கொள்க).

41. ஒரு சீரான உருளையின் வட்டதள ஆரம் r; உயரம் h; இது ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டு நழுவாமல் நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. சாய்தளத்தின் சாய்வை மிகுதிப்படுத்திக் கொண்டேபோனால், சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{2r}{h}\right)$ இருக்கும் தருவாயில் அது கவிழுமென நிறுவுக.

42. ABC என்று ஒரு முக்கோணத் தகடுண்டு; AB என்ற பக்கம் ஒரு வழவழப்பான மேசைமேல் வைக்கப்பட்டு, முக்கோணம் கவிழ்ந்துவிடாமல் குத்து தளத்தில் நிற்க முடியுமானால் $BC^2 \sim AC^2=3\,AB^2$ என நிறுவுக.

43. $ABCD$ என்ற ஒரு சதுரத் தகட்டில், E என்பது CD-ன் மையம். $\triangle AED$ துண்டிக்கப்பட்டு CE ஒரு மட்ட தளத்தில் இருக்குமாறு குத்துதளத்தில் எஞ்சிய பகுதி $ABCEA$ நிறுத்தப்படுகிறது. தகட்டின் எடை W; தகடு கவிழாதிருக்கும் வகையில் A-ல் $\frac{W}{6}$ அளவு வரை ஓர் எடையைக் கட்டித் தொங்கவிடலாமென நிறுவுக.

44. ஒரு சுவர்முனையில் ஒரு செங்கல், தனது நீளத்தில் கால் பங்கு நீளம் வெளியே நீட்டி வைக்கப்படுகிறது. இதன் மேல் $1\frac{1}{4}$ செங்கல் வைக்கப்படுகிறது. ஒரு கல்லின் கால் பங்கு

நீளம், முதல் கல்லுக்கு வெளியே நீட்டியிருக்கிறது. இதன்மேல் $1\frac{1}{2}$ செங்கல் அதேமாதிரி வைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறே தொடர்ந்து நடக்கிறது. நான்கு அடுக்கு வரை இக்கற்கள் கவிழாதிருக்குமெனவும், ஐந்தாவது அடுக்கு வைத்தால் எல்லாம் விழுமெனவும் நிறுவுக.

45. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ அளவு சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மேல் ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக சில வட்டமான நாணயங்கள் நழுவாமல் அடுக்கப்படுகின்றன. அடுக்கு முறை ஓர் உருளை வடிவம்; ஒவ்வொரு நாணயத்தின் மொத்தம் அதன் விட்டத்தைப் போல் $\frac{1}{20}$ அளவு உள்ளது. கவிழ்ந்துவிடாமல் 120 நாணயங்களுக்கு மேல் அடுக்கமுடியாதென நிறுவுக.

46. ABC என்ற முக்கோணத் தகட்டின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவை முறையே 6, 8, 10 செ. மீ. நீளமுடையவை. AC என்ற பக்கம் ஒரு மேசை மேல் வைக்கப்பட்டு முக்கோணம் குத்து தளத்தில் நிற்கிறது. C என்ற முனையை மேசை ஓரத்திற்கு அப்பால் $5\frac{7}{15}$ செ. மீ. வரை நகர்த்திச் சென்றால், தகடு கவிழாதெனவும், அதற்குமேல் நகர்த்தினால், தகடு கீழே விழ ஏதுவாகுமென நிறுவுக.

47. n சம அளவான நாணயங்கள் ஒரு மேசை மேல் ஒன்றின் மேல் ஒன்றாக அவற்றின் பு. மையங்கள் ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமையும் வகையில் அடுக்கப்படுகின்றன. நாணய ஆரம் r; மொத்தம் c. பு. மையங்கள் அமைக்கும் நேர்கோடு செங்குத்துக் கோட்டுக்கு $\tan^{-1}\left\{\frac{2r}{(n-1)c}\right\}$ அளவுக்கு மேல் சாய்ந்தால் நாணயங்கள் விழுந்து விடுமென நிறுவுக.

48. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலுள்ள சீட்டுகள், ஒன்றன் மேல் ஒன்றாக, அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. மேலிருக்கும் சீட்டு கீழிருக்கும் சீட்டு வரம்பிற்கு மேல் சிறிது நீட்டிக்கொண்டிருக்கிறது. அடுக்கு விழாத வகையில் ஒவ்வொரு சீட்டும் கீழிருக்கும் சீட்டுக்கு மேல் மீப்பெரு நீட்சி பெற்றிருக்குமாயின், வரம்புகளுக்கு மேல் நீட்டிக்கொண்டிருக்கும் நீள அளவுகள், இசைத் தொடரில் இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக.

49. ஒரு குன்றின் மேல் ஏறும்போது ஒருவன் முன்னால் சாய்ந்து சாய்ந்து ஏறுகிறான்; இறங்கும்போது பின்னால்

சாய்ந்து சாய்ந்து இறங்குகிறன். பு. மையக் கொள்கைகள் அடிப்படையில் இதன் காரணங்களை விளக்குக.

50. நாம் ஒரு கனமான பெட்டியை ஒரு கையில் பிடித்துக் கொண்டு நடக்கும்போது, மற்றொரு கையை முழுவதும் நீட்டுகிறோம். இதன் காரணம் என்ன?

11. உறுதி, உறுதியில்லா, நடுநிலைச் சம நிலைகள்

(Stable, Unstable, Neutral Equilibrium)

11-1. ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் ஒரு கூம்பு நிற்கிறது. வட்ட அடித் தளம் கிடைத் தளத்திலுள்ளது. இதைச் சற்று அசைத்துவிட்டால், மறுபடியும் அதே நிலையில் வந்து நிற்கும்; அதாவது சம நிலைக்குத் திரும்பி விடும்.

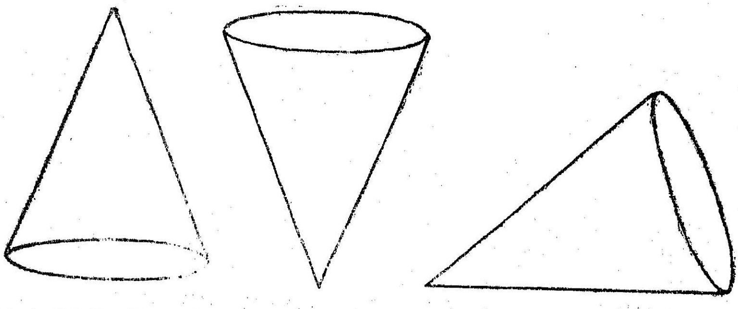
ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் ஒரு கூம்பு தலை கீழாக நிற்கிறது; அதாவது அதன் உச்சி கிடைத் தளத்தில் தொட்டு நிற்கிறது. இதைச் சற்று அசைத்து விட்டால் சம நிலைக்குத் திரும்பாமல் கீழே சாய்ந்து விடும்.

ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் அக் கூம்பைப் படுக்க வைத்து, சற்று அசைத்தால், அது நகர்ந்து போய் மறுபடியும் அசைவற்றிருக்கும். அதாவது படுக்க வைக்கப்பட்ட கூம்பு, எந்த கிடைத் தளத்தில் வைத்தாலும் வைக்கப்பட்ட நிலையில் அசைவற்றிருக்கும்.

முதற் கூறப்பட்ட நிலையில் [படம் 11-1.(i)] அக் கூம்பு **உறுதியான சம நிலையில்** (Stable Equibrium) இருக்கிறதெனக் கூறப்படும்.

இரண்டாவதாகக் கூறப்பட்ட நிலையில் [படம் 11-1.(ii)] அக் கூம்பு **உறுதியில்லாத சம நிலையில்** (Unstable Equilibrium) இருக்கிறதெனக் கூறப்படும்.

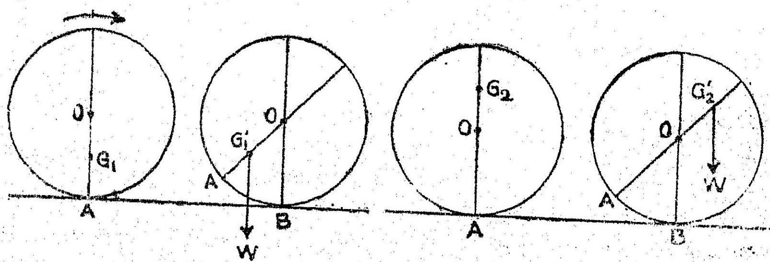
மூன்றாவதாகக் கூறப்பட்ட நிலையில் [படம் 11-1.(iii)] அக் கூம்பு **நடுநிலைச் சம நிலையில்** (Neutral Equilibrium) இருக்கிறதெனக் கூறப்படும்.



படம் 11-1. (i) படம் 11-1. (ii) படம் 11-1. (iii)

11-1.1. மற்றுமோர் எடுத்துக்காட்டு கொண்டு இம் மூன்று ''சம நிலைகள்'' (அசைவற்ற நிலைகள்) பற்றி விளக்குவோம்.

பு. மையம் அதன் மையத்திலில்லாத ஒரு கோளத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 11-1.1. (a) படம் 11-1.1. (b) படம் 11 1.1. (c) படம் 11-1.1. (d)

[படம் 11-1.1. (a)]ல் G_1 என்ற பு. மையம் O-க்குக் கீழே யிருக்கிறது.

அதைச் சற்று வலஞ் சுழியாக உருளும்படி தள்ளினால் OA என்பது 11-1.1. (b)-ல் காட்டியபடி புது இடம் வருகிறது; G_1' என்பது இப்போது பு. மையம்; கோளம் கிடைத் தளத்தை B-ல் தொடுகிறது. இங்கு G_1'-ல் செயற்படும் W என்ற எடை (விசை)யின் திருப்புத்திறன் (Bஐ யொட்டி) இடஞ் சுழியாகச்

செயற்பட்டு, கோளத்தை முன்னிருந்த நிலைக்கே திருப்ப முயற்சிக்கும். இந்த நிலை உறுதியான சம நிலையாகிறது; ஏனெனில், கோளத்தைச் சற்று அசைத்தால், கோளம் மறுபடியும் தான் இருந்த இடத்திற்கே வரும் இயல்பு பெற்றிருக்கிறது.

படம் 11-1.1. (c)-ல் G_2 என்ற பு. மையம் O–க்கு மேலேயிருக்கிறது. இதைச் சற்று வலஞ் சுழியாக உருளும்படி தள்ளினுல் OA என்பது 11-1.1. (d)–ல் காட்டியபடி புது இடம் வருகிறது; G_2' என்பது பு. மையம். இப்போது Bஐ யொட்டிய திருப்புத் திறன் வலஞ் சுழியாகவே செயற்பட்டு, கோளத்தை மேலும் உருட்டிச் செல்ல முயற்சிக்கும். இந்த நிலை உறுதியற்ற சம நிலையாகிறது; ஏனெனில் கோளத்தைச் சற்று அசைத்தால், கோளம் மேலும் உருண்டு செல்லும் இயல்பு பெற்றிருக்கிறது.

O-லேயே பு. மையமிருப்பின், கோளத்தைச்சற்று அசைத்து விடின், புது நிலைக்குச் சென்று அங்கே அசைவற்றிருக்கிறது. இது நடுநிலைச் சம நிலையாகும்.

எனவே, இவ் வெடுத்துக்காட்டுகளின் அடிப்படையில், சம நிலைகளை வரையறுப்போம்.

11-2. **உறுதிச் சமநிலை :** ஒரு பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது, அதைச் சற்று அசைத்தால் அப் பொருளின் மேல் இயங்கும் விசைகள் அப் பொருளை முதல் நிலைக்கே திருப்பிக் கொண்டு வரும் தன்மையுடையதாயின், அப்பொருள் உறுதிச் சம நிலையில் இருக்கிறது. (அதன் மேல் இயங்கும் விசைகள் அதை உறுதிச் சம நிலையில் நிலைக்க வைக்கின்றன எனவும் கூறலாம்)

உறுதியற்ற சமநிலை : ஒரு பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது, அதைச் சற்று அசைத்தால், அப் பொருளின் மேல் இயங்கும் விசைகள் அப் பொருளை மேலும் சமநிலை பிறழச் செய்யும் தன்மையுடையதாயின், அப் பொருள் உறுதியற்ற சமநிலை (உறுதியில் சம நிலை)யில் இருக்கிறது. (அதன் மேல் இயங்கும் விசைகள் மேலும் அப் பொருளை சம நிலையிலிருந்து பிறழச் செய்கின்றன எனவும் கூறலாம்.)

நடுநிலைச் சமநிலை : ஒரு பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது, அதைச் சற்று அசைத்துவிட்டால், விட்ட இடத்திலே மறுபடியும் அசைவற்று நிற்குமாயின் அப் பொருள் நடு

நிலைச் சம நிலையிலுள்ளது. (அதன் மேல் இயங்கும் விசைகள் அதை நடுநிலைச் சமநிலையில் வைக்கின்றனவெனக் கூறலாம்).

11-2.1. பொதுவாகக் குறுகிய அடித்தளம் உள்ள பொருள்களும் ''தலை கனத்த'' பொருள்களும் உறுதியற்ற சம நிலையில் இருக்கும்.

பொதுவாகப் பரந்த அடித்தளம் உள்ள பொருள்களும் ''அடிக்கனம்'' உள்ள பொருள்களும் உறுதியான சமநிலையிலிருக்கும். பு. மையம் மிகத் தாழ இருக்கும் பொருள்கள் உறுதியான சம நிலையிலிருக்கும்.

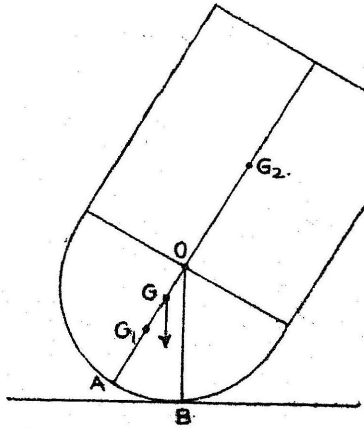
''அடிக்கனமான'' பழைய தஞ்சாவூர் உருட்டுப்பொம்மைகள் எவ்வளவு ஆட்டி விட்டாலும், முன்னிருந்த நிலைக்கே திரும்பி வந்து விடும்.

நீண்டதொரு கம்பத்தை ஒரு மனிதன் தனது உள்ளங்கையில் செங்குத்தாக நிறுத்திக் காட்டும்போது, அக் கம்பம் உறுதியற்ற சம நிலையில் இருக்கிறது. அந்த வித்தை காட்டும் மனிதன் (தெரிந்தோ, தெரியாமலோ) தனது உடலையெல்லாம் வளைத்து வளைத்து அக் கம்பத்தின் பு. மையத்திலிருந்து கீழே இறங்கும் குத்துக்கோடு தன் கையிலிருக்கும் கம்ப முகத்திற்குள் விழும்படியாக சமாளித்துக் காட்டுகிறான்.

11–2.2. சம அடர்த்தியுள்ள ஓர் உருளையின் ஒரு பக்கத்தில் அதே விட்டமுடைய ஒரு அரைக்கோளம் இணைக்கப்பட்டு, அரைக்கோள வளைவுப் பக்கம் ஒரு கிடைத் தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அது உறுதியான சம நிலையாவெனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(படம் 11-2·2)-ல் குறிக்கப்பட்ட திண்மம் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. உருளையின் ஆரம் a, உயரம் h எனக் கொள்க. உருளையின் எடை $\pi a^2 h \rho g$; பு. மையம் G_2. அரைக்கோளத்தின் எடை $\frac{2}{3} \pi a^3 \rho g$; பு. மையம் G_1. O-இரண்டிற்குமான பொது மையம். $OG_1 = \frac{3}{8} a$; $OG_2 = \frac{h}{2}$ முதலில் அரைக் கோளத்தின் A என்ற புள்ளி கிடைத் தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருந்தது; சற்று அசைத்த பின் B என்ற புள்ளி கிடைத் தளத்தைத் தொட்டிருக்கிறது.

BO என்ற செங்கோடு வழியாகக் கிடைத்தளத்தின் எதிர் வினை (விசை) செயற்படும்.



படம் 11.2.2.

இரு பொருள்களின் கூட்டான பொருளின் பு. மையம், படத்தில் காட்டியபடி G, என்ற புள்ளி O–க்குக் கீழே யிருப்பின் அப் பொருள் உறுதிச் சம நிலையில் இருக்கும்; O–க்கு மேலே யிருப்பின் (படத்தில் காட்டப்படவில்லை) உறுதியற்ற சம நிலையி லிருக்கும்.

G–ன் நிலையைக் குறிக்கும் சமன்பாடு

$$\tfrac{2}{3}\pi a 3 \rho g \times G_1 G = \pi a^2 h \rho g \times G_2 G.$$

O–க்குக் கீழே G இருப்பின் $G_1 O > G_1 G$.

$$\therefore \tfrac{2}{3}\pi a^3 \rho g \times G_1 O > \tfrac{2}{3}\pi a^3 \rho g \times G_1 G.$$

O–க்கு மேலே G–இருப்பின் $G_1 O. < G_1 G$.

$$\therefore \tfrac{2}{3}\pi a^3 \rho g \times G_1 O < \tfrac{3}{2}\pi a^3 \rho g \times G_1 G.$$

எனவே, $\dfrac{\text{உறுதியான சம நிலை}}{\text{உறுதியற்ற சம நிலை}}$ – க்குரிய கட்டுப்பாடு முறையே,

$$\tfrac{2}{3}\pi a^3 \rho g\, G_1 O \quad \gtrless \quad \pi a^2 h \rho g \times G_2 G;$$

அதாவது $\frac{2}{3} a \times G_1 O \gtrless h \times G_2 G.$

அதாவது $\frac{2}{3} a \times \frac{3}{8} a \gtrless h \times \frac{h}{2}$

அதாவது $a^2 \gtrless 2 h^2$

அதாவது $a \gtrless h \sqrt{2}$

அல்லது $h \gtrless \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = .707\, a$ ......

எனவே, உருளையின் உயரம் ஆரத்தைப்போல் 0.707 பங்குக்குக் குறைவாயிருப்பின் உறுதிச் சமநிலை; 0.707 பங்குக்கு மேற்படின் உறுதியற்ற சமநிலை.

11–3. இப் பொருள்கள் ஒன்றின் மேலொன்று நிற்கின்றன. ஒன்றையொன்று தொடும் பகுதி மட்டுமே கோளப்பகுதி; அக் கோளப் பகுதிகளின் ஆரங்கள் முறையே r, R; மேலிருக்கும் பொருளைச் சற்று அசைத்துவிட்டால், சமநிலை உறுதியானதா, அல்லது உறுதியற்றதா எனக் காணல்.

(படம் 11–3. காண்க.) முதலில் குறிப்பிட்டபடி இரு பொருள்கள் தொடுமிடம் A_1 க்கு அருகில் உள்ள இடம் மட்டுமே கோளப் பகுதிகளாக இருப்பின் போதுமானது.

மேற்கோளப் பகுதி A_1-ல் பெற்றிருக்கும் ஆரம் r-எனவும், கீழ்க் கோளப் பகுதி A_1-ல் பெற்றிருக்கும் ஆரம் R எனவும் கொள்வோம்.

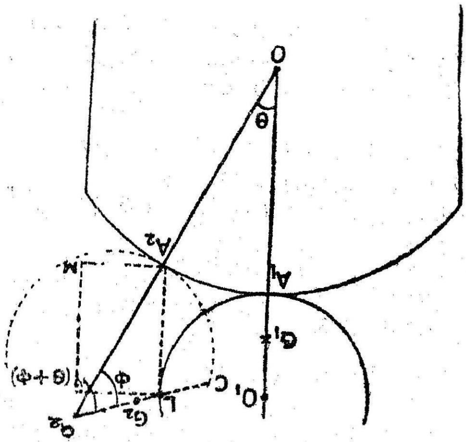
G_1 — மேற் பொருளின் பு. மையம்.

O_1 — மேற் பொருளின் கோளப் பகுதியின் மையம்.

O — கீழ்ப் பொருளின் கோளப்பகுதியின் மையம்.

(கோள மையமும், பு. மையமும் ஒன்றேயல்ல என்பது கவனத்திற்குரியது.)

ஒன்றன் மேலொரு பொருள் A_1-ல் தொட்டுக்கொண்டு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது, O_1G_1O ஒரு நேர் செங்குத்துக் கோடாகும். G_1-ல் கீழே செங்குத்தாகச் செயற்படும் மேற் பொருளின் எடையை எதிரீடு செய்து அசைவற்ற



படம் 11-3.

நிலையை உருவாக்குவது A_1-ல், A_1O_1 வழியாக கீழ்ப் பொருளால் ஏற்படும் செங்குத்தான எதிர்வினை (விசை)யாகும்.

$A_1G_1 = h$ எனக் கொள்க.

மேற் பொருளை, கீழ்ப்பொருளின் மேல் சிறிதும் நகர்த்தாமல் சற்று உருள வைப்போம். உருண்டு வந்த நிலை, இடையிடை விட்ட கோடுகளால் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. A_1 என்ற புள்ளி மாறியிருக்கும் இடம் C; புது தொடுமிடம் A_2; O_1-ன் புது இடம் O_2. A_2-லிருந்து மேலே வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு O_2Cஐ L-ல் சந்திக்கட்டும்; O_2-லிருந்து கீழே வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு A_2 வழியாக வரையப்படும் கிடைக்கோட்டை M-ல் சந்திக்கட்டும்.

கீழ்ப் பொருளின் மேல் மேற் பொருள் சற்று உருண்டுவிட்ட பின்பு:

$\angle A_1OA_2 = \theta$ எனவும்,

$\angle A_2O_2C = \phi$ எனவும் கொண்டால்

$\angle CO_2M = \theta + \phi$ (ஏனெனில் $\angle A_1OA_2 = \angle A_2O_2M$)

மேற் பொருள் கீழ்ப் பொருளின் மேல் சிறிதும் நகராமல் உருண்டிருக்கிறபடியால்,

$$R\theta = r\,\phi \text{ (வில் } A_1 A_2 = \text{ வில் } CA_2)$$

$A_2\,L$–க்கு வலப்பக்கம் G_2 இருப்பின், மேற் பொருள் பழைய அசைவற்ற நிலைக்கு வராமல் மேலும் உருளும். ஆகவே, அந்த மாதிரிச் சூழ்நிலையில் முதனிலை உறுதியற்ற சமநிலையாகும்.

மாறுக $A_2\,L$-க்கு இடப் பக்கம் G_2 அமையுமாயின், மேற் பொருள் பழைய அசைவற்ற நிலைக்குத் திரும்பக்கூடிய சூழ்நிலை ஏற்படும். ஆகவே, இந்த மாதிரிச் சூழ்நிலையில் முதனிலை உறுதியான சமநிலையாகும்.

எனவே, $\dfrac{\text{உறுதியான}}{\text{உறுதியற்ற}}$ சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு,

G_2–லிருந்து $O_2\,M$–க்குள்ள தூரம்,

முறையே $\gtrless$ L–லிருந்து O_2M - க்குள்ள தூரம் எனக் கூறலாம்.

$$\text{அதாவது } O_2\,G_2 \sin(\theta + \phi) \gtrless O_2\,A_2 \sin\theta$$

$$\text{அதாவது } (r - h)\sin(\theta + \phi) \gtrless r\sin\theta$$

$$\text{அதாவது } \frac{r-h}{r} \gtrless \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)} \qquad \ldots\ldots\ldots (A)$$

θ, ϕ இரண்டும் மிக நுண்ணிய (சிறிய) மதிப்புடையவை யாதலால், $\dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)} =$ தோராயமாக $\dfrac{\theta}{\theta+\phi}$

$\therefore$ (A) என்ற கட்டுப்பாடு,

$$\frac{r-h}{r} \gtrless \frac{\theta}{\theta+\phi} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது } \frac{r-h}{r} \gtrless \frac{\theta}{\theta+\frac{R}{r}\theta} \quad (\because R\theta = r\phi)$$

அதாவது $\frac{r-h}{r} \gtrless \frac{r}{R+r}$

அதாவது $(r-h)\ (R+r) \gtrless r^2$

அதாவது $r R \gtrless h\ (R+r)$

அதாவது $\frac{r R}{r R h} \gtrless \frac{h\ (R+r)}{r R h}$

அதாவது $\frac{1}{h} \gtrless \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ என்ற கட்டுப்பாடு பெறப்படும்.

$\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ என அமைந்து விடுமாயின், நடு நிலைச் சமநிலை யென்று கூறலாம்; ஆனால், அது உண்மையாக உறுதியற்ற சமநிலையாயிருக்கும். மேற்பட்ட ஆராய்ச்சி செய்ய வேண்டுமாயின் $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$ என்ற வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

(Loney: நிலையியல் (Statics) பகுதி IX பத்தி 156– பக்கங்கள் 167—169 வரை காண்க.)

எனவே, $\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ என்பதே உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு.

h என்பது தொடுமிடத்திலிருந்து மேற் பொருளின் பு. மைய தூரம்;

r–மேற் பொருள், தொடுமிடத்தில் பெற்றிருக்கும் கோளப் பகுதியின் ஆரம்;

R–கீழ்ப் பொருள், தொடுமிடத்தில் பெற்றிருக்கும் கோளப் பகுதியின் ஆரம்.

ஒரு சம தளத்தைக் கந்தழி ஆரம் கொண்ட ஒரு கோள மெனக் கொள்ளலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 1: மேற் பொருள் ஒரு சமதள முடையதாயிருப்பின் $\frac{1}{r}$ பூச்சியமாகிறது. எனவே, ஒரு சம தளம் ஒரு வளை தளத்தின் மேல் நிற்பின், உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு $\frac{1}{h} > \frac{1}{R}$.

கிளைத்தேற்றம் 2: அவ்வாறே ஒரு சம தளத்தின் மேல் ஒரு வளை பொருளிருப்பின் $\left(\frac{1}{R}\right.$ பூச்சியமாவதால் $\left.\right)$ உறுதியான சமநிலைக் குரிய கட்டுப்பாடு $\frac{1}{h} > \frac{1}{R}$.

கிளைத்தேற்றம் 3: கீழ்ப் பொருள் உட் குவியமான ஒரு பொருளாயிருப்பின் (concave), உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு,

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} - \frac{1}{R}.$$

$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ என்றுமுதல் பெறப்பட்ட கட்டுப்பாடும், கிளைத் தேற்றங்கள் (1), (2), (3)-ல் பெறப்பட்ட கட்டுப்பாடுகளும், உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடுகளாம். இக் கட்டுப்பாடுகள் பொருந்தாவிடத்து, உறுதியற்ற சமநிலை உருவாகிறதென்றே கூறிவிடலாம்.

11-4. **எடுத்துக் காட்டு 1:** ஒரு கனமான சீரான கூம்புத் திண்மத்தின் அடித்தளம் ஒரு சொர சொரப்பான கோளத்தின்மேல் நிற்கிறது. உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடென்ன?

இங்கு [படம் 11-4.(i)]-ல் காட்டப்பட்டபடி,

$$h = AG = \tfrac{1}{4} \text{ (கூம்பின் உயரம்)}$$

$$\frac{1}{r} = 0$$

கோளத்தின் ஆரம் R ஆனால், உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு,

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\,(\text{கூம்பின் உயரம்})} > \frac{1}{R}$$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

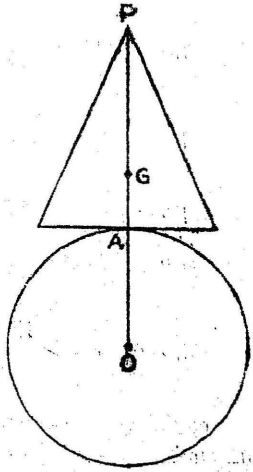
அவாவது $R > \frac{1}{4}$ (கூம்பின் உயரம்)

அதாவது $4R >$ (கூம்பின் உயரம்)

அதாவது, (கூம்பின் உயரம்) $< 4R$.

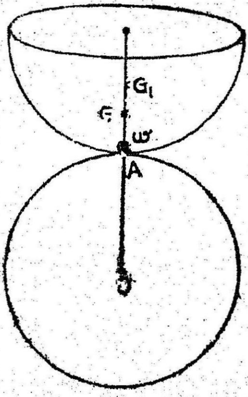
உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாடு யாதெனின், கூம்பின் உயரம், கீழ்க் கோளத்தின் ஆரத்தின் நான்கு மடங்கிற்குக் குறைவாயிருக்க வேண்டும்;

மேற்படின், உறுதியற்ற சமநிலையாகும்.



படம் 11-4.(i)

எடுத்துக்காட்டு 2 : b ஆரமும் W எடையுமுள்ள ஓர் அரைக்கோள அமைப்பிலுள்ள கிண்ணம் ஒரு நிலை நிறுத்தப்பட்ட a ஆரம் கொண்ட $(a<b)$ முழுக் கோளத்தின் உச்சியில் வைக்கப் பட்டிருக்கிறது. கிண்ணத்தினுள் அடியில் ω எடையுள்ள ஒரு மிகச் சிறிய கோளம் கெட்டியாகப் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. $\omega > W\left(\frac{b-a}{2\ a}\right)$ என்ற கட்டுப்பாடிருந்தால்தான், உறுதியான சமநிலை இங்கு நிலவுமென நிறுவுக.



படம் 11-4. (ii).

(படம் 11-4.(ii). காண்க.) அரைக் கோள கிண்ணத்தின் பு. மையம் தொடுமிடமானது A-லிருந்து $\frac{b}{2}$ தூரத்திலுள்ளது. அக் கிண்ணத்துள் ω என்ற மற்றொரு சிறிய கோளம் உள்ளது. இவ்விரு பொருளுக்கும் சேர்த்து பு.மையம் G-இல் இருக்குமானல்,

$$(W+\omega)\quad AG = W.AG_1 + \omega\ .\ 0$$

$$\therefore\ AG = \frac{W.b}{2\,(W+\omega)}$$

இதுவே h என்பதாகும்.

எனவே உறுதியான சமநிலைக்குரிய கட்டுப்பாட்டின்படி $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ஆகும்.

$$\text{அதாவது} \quad \frac{2(W+\omega)}{Wb} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{2(W+\omega)}{W\,b} > \frac{a+b}{a\,b}$$

$$\text{அதாவது} \quad 2(W+\omega)\,a > W(a+b)$$

$$\text{அதாவது} \quad \omega\,a > \frac{W\,a + W\,b - 2W\,a}{2}$$

$$\text{அதாவது} \quad \omega > \frac{W(b-a)}{2\,a}$$

குறிப்பு: ω என்ற சிறு கோளம் கெட்டியாகப் பொருத்தப் படாமல், தனியாக வைக்கப்பட்டிருக்குமானால், மேல் கிண்ணத்தைச் சற்று அசைத்தால் ω, உருண்டு மற்றொரு நிலைக்கு வரும். அப்போது $\omega < \frac{W(a-b)}{2\,b}$ ஆக இருந்தாலொழிய உறுதியான சமநிலை யிராதென நிறுவலாம். அப்போது $a > b$ ஆக இருக்க வேண்டுமெனத் தெரிகிறது.

பயிற்சி 11

1. ஓர் அரைக் கோளத்தின்மேல் அதே ஆரம் கொண்ட வட்ட தளமுடைய ஒரு கூம்பு பதிக்கப்பட்டிருக்கிறது. அரைக் கோளப் பகுதி சொர சொரப்பான கிடைத்தளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. பொருள் முழுதும் ஒரே சீரான அடர்த்தி பெற்றது. உறுதியான சமநிலை இருக்க வேண்டுமாயின், கூம்பின் மீப்பெரு உயரம் $r\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

2. PCQ என்ற விட்டமுடைய ஒரு கோளத்தின் மையம் C; ஆரம் r. CP ஐ விட்டமாகக்கொண்ட ஒரு கோளம் அதிலிருந்து செதுக்கியெடுக்கப்பட்டு விட்டது. எஞ்சிய கோளப் பகுதி Q என்ற புள்ளி உச்சியாக விருக்குமாறு ஒரு சொர சொரப்பான கோளப் பகுதிமேல் வைக்கப்பட்டிருக் கிறது. பின் கூறிய கோளப் பகுதியின் ஆரம் $8\,r$ ஆனல்,

உறுதிச் சமநிலையில் முதற் கோளப் பகுதியிருக்க வேண்டு மாயின், எந்த அளவுவரை p-ன்மேல் ஓர் எடையை வைக்கலா மெனக் காண்க. $\left[\frac{\pi r^3}{3}\rho - (\rho \text{ அடர்த்தி})\right]$

3. ஓர் அரைக்கோளம் அதே ஆரமுள்ள ஒரு கோளத்தின்மேல் நிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. வளைந்த பகுதி கோளத்தின்மேல் தொட்டு நிற்குமாயின், சமநிலை உறுதியற்ற சமநிலையெனவும், மட்ட தளப்பகுதி தொட்டு நிற்குமாயின், சமநிலை உறுதிச் சமநிலை யெனவும் நிறுவுக.

12. கயிறுகளும் சங்கிலிகளும — சங்கிலியம்

(Strings and Chains - the Catenary)

12–1. இரண்டு செங்குத்தான கம்பங்களில் ஒரு கயிறு கொண்டு ஒரு கொடி (துணிகளை உலர்த்த) கட்டுகிறோம். அது ஓர் உருவந் தாங்கித் தொங்குகின்றது. சுவரில் ஓரே உயரத்தில் இரு ஆணிகள் அடித்து, மெல்லிய வளையங்களின் கோப்பான ஒரு சங்கிலியை அவ்விரு ஆணிகளிலிருந்து தொங்க விடுகிறோம். அதுவும் சற்றுத் தாழ்ந்து ஓர் உருவந் தாங்கித் தொங்குகிறது. இந்தக் கயிறு, சங்கிலி முதலியன வளையக் கூடிய தன்மை அல்லது நெகிழ்தல் தன்மையுடையவை. இவை வளைவதால் அல்லது நெகிழ்வதால் உடைவதில்லை. ஒரு பிரம்பை எடுத்து வளைத்தால், மிகுதியாக வளைத்தால் மட்டுமே பிரம்பு உடைகிறது; இல்லாவிடில் உடைவதில்லை.

கயிறு சங்கிலி போன்ற பொருள்களுக்கும் கம்பி, பிரம்பு, கழி போன்ற பொருள்களுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டினை இந்தப் பண்பை யொட்டிப் பார்த்தால், முதற் கூறியவை வளைதன்மை அல்லது நெகிழ்த் தன்மை யுடையன; வளைத்தால் உடையா; பின் கண்ட பொருள்கள் ஓரளவு வளைந்து கொடுக்கும்; மிகுதியாக வளைத்தால் முறிந்து விடும்.

முற்றிலும் நெகிழ் தன்மையுடைய கயிறு, சங்கிலி முதலியவை அவை மேல் செயற்படும் விசைகளின் காரணமாக அசைவற்ற நிலையில் தொங்கும்போது எந்த உருவத்தில் தொங்குகின்றனவோ அந்த உருவங்களை வளை வரைகளாகக் கொண்டால், அவ் வளை வரைகளின் சமன்பாடுகளென்ன என்பவற்றினை நிலையியல் தொடர்பில் காண்போம்.

கொள்கைகள் : ஒரு முற்றிலும் நெகிழ்வான கயிறு எனின், அதன் செங்குத்து வெட்டு முகத்தில் (normal section) ஒரே ஒரு விசை செயற்படுகிற தென்பதும், அவ் விசை அக் கயிருன வளை வரைக்கு அங்கு வரையக் கூடிய தொடுவரை வழியாக செயற்படுகிற தென்பதும் கொள்கையாகும். இவ் வெட்டு முகம் மிக மிக நுண்ணியதெனவும், அதை ஒரு புள்ளியென ஏற்பதும் கொள்கையாகும். அக் கயிறு எளிதில் வளையும், நெகிழும் எனவும், ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் போல ஒரு குறிப்பிட்ட, சாதாரணமாக மாருத வடிவுடையதல்ல வெனவும் கொள்வது மரபு.

இவ்விதமான கொள்கைகளின் அடிப்படையில் இப் பகுதியில் சில முடிவுகள் பெறப்படும்.

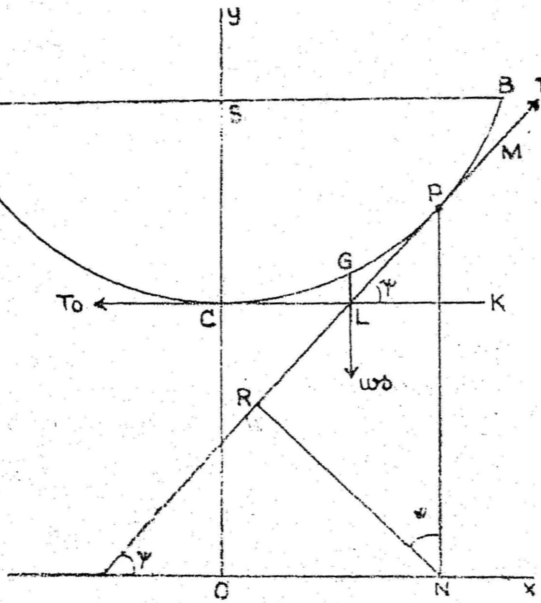
12-2. **சாதாரண சங்கிலியம்** (The common Catenary) **ஒரு சீரான கனமுடைய, மீள் இயல்பற்ற கயிறு அதன் மேல் புவியிர்ப்பு விசை மட்டும் செயற்படுமாறு தொங்குகிறது. அது தொங்கும் உருவ வளைவரை $y = c\cosh\frac{x}{c}$ என்ற அமைப் புடையது.** அவ் வடிவம் சங்கிலியம் (Catenary) எனப்படும்.

(படம் 12-2.)–ல் காட்டியபடி தன்னிச்சையாக ACB என்ற கயிறு (முதலில் குறிப்பிட்ட தன்மைகள் பெற்றது) தொங்கு கிறது. அக் கயிற்றின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C.

(ACB என்பது தொங்கும் கயிற்றின் ஒரு பகுதி யெனவும் கொள்ளலாம்). ஏதாவதொரு புள்ளி P அக் கயிற்றில் எடுத்துக் கொள்க; CP என்ற வில் நீளம் s எனக் கொள்க. P என்ற புள்ளியில் அக் கயிற்றின் இழு விசை T எனவும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியான C–ல் கயிற்றின் இழு விசை T_0 எனவும் கொள்க. சீரான கயிருதலின், ஓர் அலகு நீளத்தின் எடை ω எனக் கொள்ளலாம். எனவே CP என்ற வில் பகுதியின் எடை ωs; அவ் விசை (எடை) CP-ன் மையப் புள்ளியான G–ல் நேர் செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயற்படும். நாம் 12-1.-ல் கூறிய படி, T என்ற இழு விசை P என்ற புள்ளியில் அவ் வளை வரைக்கு வரையக் கூடிய தொடு கோட்டில் செயற்படும்.

இப்போது அக் கயிற்றின் CP என்ற விற் பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் மேல் செயற்படும் விசைகள் மூன்று.

(1) C என்ற இடத்தில் தொடுவரை வழியாக, அதாவது கிடைக் கோட்டில் T_0 என்ற இழு விசை.



படம் 12-2.

(2) P என்ற இடத்தில் தொடுவரை வழியாக, அதாவது PM என்ற கோட்டில் T என்ற இழு விசை.

(3) வில் மையம் G வழியாக கீழ்க் குத்துக் கோட்டில் செயற்படும் ws என்ற கயிற்றின் எடை.

C வழியாக உள்ள கிடைக் கோட்டிற்கும், P வழியாக உள்ள தொடுவரைக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\angle MLK = \psi$ எனக் கொள்க.

T_0, T, ws என்ற மூன்று விசைகளும் CP என்ற பகுதியின் மேல் செயற்படும்; அப் பகுதியை அசைவற்ற நிலையில் இருத்தி வைப்பதால், மூன்று விசைத் தேற்றப்படி, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். அப் புள்ளி T_0-ம், T-ம் சந்திக்கும் இடம் L ஆகும். எனவே LG கிடைக் கோட்டுக்குக் குத்துக் கோடாகும்.

இலாமித் தேற்றப்படி,

$$\frac{\omega s}{\sin \psi} = \frac{T}{\sin 90} = \frac{T_0}{\sin (90 + \psi)}$$

$$\therefore \quad \frac{\omega s}{\sin \psi} = T = \frac{T_0}{\cos \psi}$$

$$T \cos \psi = T_0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$T \sin \psi = \omega s \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இங்கு T_0—அதாவது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழு விசை c அளவு நீளமுள்ள அக் கயிற்றின் எடைக்குச் சமமென எடுத்துக் கொள்வதால் நமது ஆய்வின் பொதுத்தன்மை மாருது.

$$\therefore \quad T \cos \psi = \omega c \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

எனக் கொண்டால்,

$$\frac{T \sin \psi}{T \cos \psi} = \tan \psi = \frac{\omega s}{\omega c} = \frac{s}{c}$$

ஆனல், இவ் வாய்வு முழுவதும் x, y அச்சுகள் முறையே கிடைக் கோடு, அதற்குரிய குத்துக் கோடு என்று கொள்வோமானல், அவ் வச்சுக்களை யொட்டி,

$$\frac{dy}{dx} = \tan \psi = \frac{s}{c} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\therefore \quad s = c \tan \psi \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இந்த அமைப்பில் ஒரு வளை வரையின் சமன்பாடு பெறப் படின் அது அவ் வளை வரையின் உள்ளியல்புச் சமன்பாடு (Intrinsic Equation) எனப்படும்.

[**குறிப்பு:** ஒரு வளை வரையில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து, அவ் வளை வரையின் வில் நீளத்தையும், அவ் வளை வரையின் சரிவையும் (gradient) இணைக்கும் தொடர்பு அவ்வளை வரையின் உள்ளியல்புச் சமன்பாடு எனப்படும்.]

எனவே இக் கயிறு தொங்கும் வடிவம்

$$s = c \tan \psi \qquad \dots \qquad \dots \qquad (5)$$

என்ற உள்ளியல்புச் சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

மேலும், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s}{c}$ ஆதலால்

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{dx}{c}$$

தொகை கண்டால் $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} = \int \frac{dx}{c}$

$$\log [s + \sqrt{s^2 + c^2}] = \frac{x}{c} + A \quad (A\text{–மாறிலி})$$

இப்போது $s = 0$ ஆகும் போது $x = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நாம் ஏற்போமானல்

$$\log [0 + c] = \frac{0}{c} + A.$$

$A = \log c$ என வரும்.

எனவே, $\log [s + \sqrt{s^2 + c^2}] = \log c + \dfrac{x}{c}$

$$\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} = e^{x/c}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{\sqrt{s^2 + c^2} + s} = \frac{1}{e^{x/c}}$$

$$\therefore \quad \frac{c\left(\sqrt{s^2+c^2}-s\right)}{\left(\sqrt{s^2+\frac{2}{c}}+s\right)\left(\sqrt{s^2+c^2}-s\right)} = e^{-\frac{x}{c}}$$

$$\frac{\sqrt{s^2+c^2}-s}{c} = e^{-\frac{x}{c}}$$

$$\frac{s}{c} = \frac{e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}}{2}$$

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \qquad \dots \qquad (6)$$

என்ற வகையில் அக்கயிறு தொங்கும் வடிவத்தின் உள்ளியல்புச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(5), (6) இரண்டையும் ஒப்பிடும்போது

$\tan \phi = \sinh \frac{x}{c}$ என வரும்.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{c}$ என வரும்

$$\therefore \int dy = \int \sinh \frac{x}{c}\, dx$$

தொகை காண $y = c \cosh \frac{x}{c} + E$ (E-மாறிலி)

இங்கு $x=0$ ஆகும்போது $y=c$ என ஏற்போமானால்

$$c=c+E$$

அல்லது $E=0$.

அதாவது $y=c \cosh \frac{x}{c}$ ... ... (7)

என $y=f(x)$ என்ற முறையில் நமக்கு அக்கயிறு தொங்கும் வடிவத்தின் x, y சமன்பாடு அல்லது சார்பு கிடைக்கிறது. இப்போது (6) பெற, நாம் ஏற்றுக்கொண்டது $s=0$ ஆகும் போது $x=0$. அதாவது C வழியாகவுள்ள குத்துக் கோட்டை

y அச்சு எனக்கொண்டு, s என்ற வில் நீளம் C-லிருந்து அளக்கப்படுகிறதென்றும் நாம் ஏற்றுக் கொண்டிருக்கிறோம்.

மேலும் (7) பெற நாம் ஏற்றுக்கொண்டது $y=c$ ஆனால் $x=0$. அதாவது y அச்சின்மேல் C க்குக் கீழே c அளவு தூரத்தில், நாம் எடுத்துக்கொண்ட அச்சுகளுக்கு ஆய ஆதி உள்ளது.

எனவே மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C வழியாக வரையப்படும் குத்துக் கோடு y அச்சாகவும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிக்குக் கீழே c அளவு தூரத்தில் ஆய ஆதியையும், அப்படிப் பெறப்பட்ட ஆய ஆதியின் வழியாக உள்ள கிடைக்கோடு x அச்சாகவும், நமது கொள்கைகளால் உருவாகிறது.

இப்போது (படம் 12.2.) ஐப் பார்த்தால், ACB என்ற கயிறு தொங்கும்போது C என்பது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி. அங்கு செயற்படும் இழுவிசை $T_0 = wC$. இங்குத் தோன்றும் c-ன் மதிப்பு யாதெனில், கயிற்றின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியினின்று செங்குத்தாகக் கீழேயுள்ள O-என்ற ஆய ஆதிவரை உள்ள தூரமாகும்.

O வழியாக கிடைக்கோடு OX என்பது X அச்சு. OX-ம் CK-ம் இணைகோடுகளாயிருக்கும்.

NP என்பது P-ன் y-ஆயத்தொலை. N-லிருந்து ML என்ற தொடுவரைக்கு NR என்ற குத்துக்கோடு வரைக. அப்போது $\angle MNR = \phi$ ஆகிறது:

(6), (7) ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{s^2}{c^2} = \sinh^2 \frac{x}{c}$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \cosh^2 \frac{x}{c}$$

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{s^2}{c^2} = \cosh^2 \frac{x}{c} - \sinh^2 \frac{x}{c}$$

$$= 1$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + 1$$

$$= \frac{c^2 + s^2}{c^2}$$

$$\therefore y^2 = s^2 + c^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8)$$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது.

(5)-ன்படி $s = c \tan \psi$ ஆதலால்

$$y^2 = c^2 \tan^2 \psi + c^2$$

$$= c^2 \sec^2 \psi$$

$$\therefore y = c \sec \psi \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9)$$

$\therefore$ (9)-ன்படி $y \cos \psi = c$.

$\triangle PNR$-ல் $PN = y$

$$RN = y \cos \psi$$

எனவே $RN = c$

மேலும் $PN^2 = NR^2 + RP^2$

அதாவது $y^2 = c^2 + RP^2$

ஆனால் (8)-ன்படி $y^2 = c^2 + s^2$ ஆகையால்

$RP = s$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது $\triangle PNR$-ன் $\left.\begin{array}{r} PN = y \\ NR = c \\ RP = s \end{array}\right\}$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

(3)-ன்படி $T = \omega c \sec \psi$

$$= \omega c \frac{PN}{NR}$$

$$= \omega c \cdot \frac{y}{c}$$

$$= \omega y \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10)$$

எனவே $T = \omega y$ என்ற ஒரு முக்கியத் தொடர்பு கிடைக்கிறது. இதன் பொதுவான பொருள் என்னவெனில், நாம் ஏற்றுக்கொண்ட ஆய் அச்சுகளின் அடிப்படையில்,

(1) கயிற்றின் வளைந்த உருவம் $y = c \cosh \frac{x}{c}$ என வருகிறது.

(2) கயிற்றின் எப் புள்ளியிலும் உள்ள இழு விசை அப் புள்ளியின் y ஆயத் தொலைக்கு நேர் தகவுப் பொருத்தம் பெற்றிருக்கிறது; தகவுப் பொருத்த மாறிலி ω என்று குறிக்கப் பட்ட அச் கயிற்றின் ஓரலகு நீளத்தின் எடையாகும்.

இப்போது நாம் பெற்ற முடிவுகளையெல்லாம் தொகுந்து ஒருங்கே கூறுவோம்; மற்றும் சில தொடர்புகளையும் பெறுவோம்.

கயிறு தொங்கும் வடிவத்தின் சமன்பாடு (சங்கிலியம்)

(*a*) $y = f(x)$ என்ற அமைப்பில் $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ... (7)

(*b*) உள்ளியல்புச் சமன்பாடு $s = c \tan \psi$ (5)

(*c*) ,, ,, $s = c \sinh \frac{x}{c}$ (6)

(*d*) ,, ,, $y^2 = s^2 + c^2$ ... (8)

(*e*) ,, ,, $y = c \sec \psi$ ... (9)

விசைத் தொடர்புகள்:

(*f*) $T_0 = \omega c$ (இது ஏற்றுக்கொண்ட கொள்கை) ... (3)

(*g*) $T = \omega y$ ... ... (10)

(*h*) $T \cos \psi = \omega y \cos \psi = \omega c = T_0$

$$T \sin \psi = \omega y \sin \psi = \omega s \quad \dots \quad (1)$$

அதாவது T என்ற இழுவிசையின் x அச்சுப் பிரிவு $T_0\,(=\omega c)$; y அச்சுப் பிரிவு ωs; (இது சங்கிலியத்தின் எந்தப் புள்ளிக்கும் பொருத்தமானது என்பது கவனத்திற்குரியது.)

வடிவத் தொடர்புகள்:

(*j*) $\frac{dy}{dx} = \tan \psi = \frac{s}{c} = \sinh \frac{x}{c}$

(*k*) கோட்ட ஆரம் (Radius of Curvature)

$$= \frac{\left(1 + \sinh^2 \frac{x}{c}\right)^{3/2}}{\frac{1}{c}\cosh \frac{x}{c}}$$

$$= c.\ \cosh^2 \frac{x}{c}$$

$$= c.\ \frac{y^2}{c^2}$$

$$= \frac{y^2}{c}$$

(கோட்ட ஆரம் புள்ளியில் குத்தாயத்தின் இருபடிக்கு நேர் தகவுப் பொருத்தமுடையது)

(*l*) மற்ருெரு வாய்பாட்டின்படி கோட்ட ஆரம் $= \frac{ds}{d\psi}$

$$= c \sec^2 \psi$$

(*m*) ஒரு வளைவில், வகை நுண் கணிதப்படி

$$\frac{dx}{ds} = \cos \psi \text{ ஆதலால்}$$

$$\frac{dx}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} = \cos \psi \text{ என அதை எழுதலாம்.}$$

ஆனல், $\frac{dx}{d\psi} = c \sec^2 \psi$

எனவே, $\frac{dx}{d\psi} \cdot \frac{1}{c \sec^2 \psi} = \cos \psi$

$$\frac{dx}{d\psi} = c \sec \psi$$

$$\therefore \int dx = c \int \sec \psi \, d\psi$$

தொகை கண்டால் $x = c \log (\sec \psi + \tan \psi) + K_2$ (K_2 — மாறிலி).

ஆனால், நமது கொள்கைப்படி $\psi = 0$, $x = 0$ ஆகையால் $K_2 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

$$\therefore x = c \log (\sec \psi + \tan \psi) \qquad \ldots \qquad (11)$$

மேலும் இதிலிருந்து,

$$x = c \log \left(\frac{y}{c} + \frac{s}{c} \right) \quad [\,(9), (5)\ \text{ஈடு செய்க}]$$

$$= c \log \left(\frac{y+s}{c} \right) \qquad \ldots \qquad (12)$$

என்ற தொடர்பும் பெறலாம்.

12-2.2. மாற்றுமுறை ஒன்றின்படி, சங்கிலியத்தின் சமன்பாடான $y = c \cosh \frac{x}{c}$ காணும் முறை பின்னர் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

முறை: $\frac{dy}{dx} = \tan \psi = \frac{s}{c}$ என முதல் முதலில் (4), (5)-ல் பெற்றோம். இத் தொடர்பில், இரு பக்கங்களுக்கும் x ஒட்டிய வகைக் கெழு கண்டால்,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \text{ என வரும்.}$$

$$\text{எனவே,} \quad \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} = \frac{1}{c} \text{ என வரும்.}$$

$$\text{எனவே,} \quad \int \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} dx = \int \frac{1}{c}\, dx \quad \text{என}$$

எழுதலாம்.

இரு பக்கங்களுக்கும் தொகை கண்டால்,

$$\sinh^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{x}{c} + K \qquad (K\text{–மாறிலி})$$

என்ற தொடர்பு வரும்.

முதலில் நாம் ஏற்றுக் கொண்ட கொள்கைப்படி,

$x = 0, \dfrac{dy}{dx} = 0$ என்ற தொடர்புகளைப் பயன்படுத்தினல்,

$$0 = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{0}{c} + K\right)$$

$= \sinh K$ என வரும்.

$\therefore K = 0$ என வரும்.

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = \sinh\left(\dfrac{x}{c}\right)$

இதை $dy \sinh\left(\dfrac{x}{c}\right) dx$ என எழுதித் தொகை

கண்டால் $y = c \cosh \dfrac{x}{c} + K_1$ (K_1 – மாறிலி)

$x = 0$, $y = c$ என்ற கொள்கை நாம் முதலில் கொண்டபடி $c = c + K_1$

$$\therefore K_1 = 0$$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x}{c}$$

என அக் கயிறு தொங்கும் வடிவம் வரும்.

c என நாம் கொண்ட கணியம், இச் சங்கிலியத்தின் துணையலகு எனப்படும்; ஏனெனில், இது சங்கிலியத்தின் சமன்பாட்டில் ஒரு முக்கிய பங்கு கொண்டு, அச் சங்கிலியத்தை வரையறுக்கப் பயன்படுகிறது.

12-2.3. சங்கிலியத்தின் வடிவம்

$$y = c \cosh \frac{x}{c} = c \left\{1 + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^4}{\lfloor 4 \, c^4} + \ldots\ldots \right\}$$

என நமக்குத் தெரியும். இது x-ல் ஓர் இரட்டைப்படைசார்பாதலால், இந்த வளைவு y அச்சையொட்டி சமச்சீருடையதாயிருக்கும். இந்த y அச்சு, சங்கிலியத்தின் சமச்சீரச்சு எனப்படும் (axis of the catenary). நாம் எடுத்துக்கொண்ட x அச்சு இச் சங்கிலியத்தின் இயக்கு வரை (Directrix) எனப்படும். மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியான C என்பது சங்கிலியத்தின் உச்சி (Vertex) அல்லது முனை எனப்படும்.

சங்கிலியத்தின் தோராய அமைப்பு

$y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்பது சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு.

எனவே $y = c\left[1 + \frac{x^2}{2c^2} + \ldots\ldots\right]$

$= c + \frac{x^2}{2c} + x$-ன் 4, 6, ... படிகள் உள்ள உறுப்புகள்.

x ஐ மிக மிகச் சிறிதாக எடுத்துக்கொண்டால், அதாவது சங்கிலியத்தின் உச்சிப் புள்ளிக்கு மிக அருகில் எடுத்துக் கொண்டால் x^4, x^6 ...... என்ற உறுப்புகள் விலக்கத்தக்க அளவு சிறிதாகி, நமக்குத் தோராயமாக,

$$2c(y - c) = x^2 \text{ என வரும்.}$$

இதன் பொருளைச் சங்கிலியத்திற்கு அமைத்துப்பார்த்தால், சங்கிலியம் தனது உச்சிக்கு மிக அருகில் தோராயமாக ஒரு பரவளைய உருவத்தைப் பெற்றிருக்கிறது எனக் கூறலாம். மேற் கூறிய தோராய வடிவமைப்பு துணையலகு c–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சங்கிலியத்தின் உச்சிக்கு அருகில் பொருந்தும்.

மற்றொரு தோராயம் x ஒடு ஒப்பிடும்போது c மிகச் சிறிதாயிருப்பின் $\frac{x}{c}$ மிகப் பெரிதாயிருக்கும். எனவே $e^{-\frac{x}{c}}$ மிக, மிகச் சிறிதாய் ஒதுக்கி விலக்கக்கூடிய அளவு நுண்ணிதாய் இருக்கும்.

இந்த நிலையில் y என்பது தோராயமாக $\frac{c}{2} \cdot e^{\frac{x}{c}}$ –க்குச் சமமாயிருப்பதால், வடிவம் படிக்குறி வளையாக விருக்கும் (approximates to the exponential curve). அதாவது ஒரு சங்கிலியத்தின் வெகு தூரத்தில் இத் தோராய வடிவமைப்பு பொருத்தமாகும்.

12–2.4. சில தோராயத் தொடர்புகள்

ஒரு கயிறு அல்லது சங்கிலி $2a$ இடைவெளி(கிடைத்தூரம்) யிலமைந்த ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளில்

கட்டப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்க. அதாவது (படம் 12–2)-ல் $AB = 2a$ எனக் கொள்க. $2a$ என்பது அச் சங்கிலியத்தின் வீச்சு (Span) எனப்படும். AB என்ற மட்டத்திலிருந்து மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியான C என்பது எவ்வளவு ஆழத்தில் இருக்கிறதோ, அது அச் சங்கிலியத்தின் தொய்வு (sag) எனப்படும்.

(படம் 12–2.)–ல் SC என்பது தொய்வாகும்.

கயிற்றையோ சங்கிலியையோ இழுத்துப் பிடித்து A-லும் B–லும் கட்டினால், தொய்வு மிகக் குறைவாக விருக்கும். உச்சியில் உள்ள இழுவிசை T_0 சற்று அதிகமாக இருக்கும்; அதே போல் A, B என்ற இடங்களிலுள்ள இழுவிசைகளும் சற்று அதிகமாக விருக்கும். இந்த நிலையில் $2l$ என்பது அக் கயிற்றின் (அல்லது சங்கிலியின்) நீளமானால், $2l > 2a$ ஆக இருப்பினும் $(2l - 2a)$ மிகச் சிறிதாகவே யிருக்கும்.

$s = c \sinh \dfrac{x}{c}$ என்ற வாய்ப்பாட்டின்படி,

$l = c \sinh \dfrac{a}{c}$ என்பது A, B என் இரு புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.

$$\text{எனவே, } l = c \left\{ \frac{a}{c} + \frac{a^3}{6c^3} + \frac{a^5}{120c^5} + \cdots\cdots \right\}$$

$$= a + \frac{a^3}{6c^2} + \frac{a^5}{120c^4} + \cdots\cdots$$

தோராயமாக $l - a = \dfrac{a^3}{6c^2}$ எனக் கொள்ளலாம்.

அதாவது தோராயமாக அச் சங்கிலியத்தின் துணையலகான

$$c = \sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}} \quad \text{எனப் பெறப்படும்.} \qquad (13)$$

எனவே சங்கிலியத்தின் உச்சியில் செயற்படும் இழுவிசை தோராயமாக $\omega \sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}$

$(l-a)$ மிகச் சிறிதாயிருப்பதால் $c = \sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}$ சற்று பெரிதாயிருக்கும். மேலும்,

$y = c \cosh \dfrac{x}{c}$ என்ற வாய்ப்பாட்டின்படி A அல்லது

B–ல் உள்ள குத்தாயம் $= c \cosh \dfrac{a}{c}$

$$= c \left\{ 1 + \frac{a^2}{2c^2} + \frac{a^4}{24 c^4} + \ldots\ldots \right\}$$

$$= c + \frac{a^2}{2c} + \frac{a^4}{24 c^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

கயிறு இழுத்துப் பிடித்துக் கட்டியிருப்பதால் A–ன் குத்தாயத்திற்கும் உச்சியின் குத்தாயத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடான $y_A - c = \dfrac{a^2}{2c}$ என்ற அளவில் ஒரு தோராயமாக, அக் கயிற்றின் தொய்வு பெறப்படும்.

எனவே தோராயமாகக் கயிற்றின் தொய்வு $\dfrac{a^2}{2\sqrt{\dfrac{a^3}{6(l-a)}}}$

எனவே தொய்வு $= \frac{1}{2} \sqrt{6a(l-a)}$ ... (14)

மற்றும் தொய்வு h (மிகச்சிறியது) எனக்கொள்வோம். உச்சியிலுள்ள இழுவிசை $= \omega c$

$$= \omega \sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$

எனப் பார்த்தோம்.

இங்கு $h = \frac{1}{2} \sqrt{6a(l-a)}$ என ஈடு செய்வோமானால் உச்சியிலுள்ள இழுவிசை $= \omega \dfrac{a^2}{2h}$ என வரும். (15)

(13), (14), (15) – ல் பெறப்பட்ட முடிவுகள் $2l$ நீளமுள்ள கயிறு, $2a$ – வீச்சில் இழுத்துக் கட்டப்பட்டிருந்தால் மட்டுமே

பொருந்துவனவாம், மேலும் $2l - 2a$ மிகச் சிறிதாயிருக்க வேண்டும்.

சில கணக்குகளில் (13) (14) (15) பெறப்பட்ட முறைகள் சிறப்பாகப் பயன்படக்கூடும்.

சங்கிலியத்தைப் பற்றிய கணக்குகளில், முதலில் (1) முதல் (12) வரை பெறப்பட்ட முடிவுகள் தேவைக்குத் தகுந்தவாறு பயன்படுத்தப்படவேண்டும். (பின்னர் அவை 12-2.1-ல் (a) முதல் (m) வரை பாகுபாடு செய்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன) இழுத்துப் பிடித்துக் கட்டப்பட்ட கயிறுகள் சங்கிலிகள் வரும் போது (13) முதல் (15) வரை பெறப்பட்ட முடிவுகள் பயன்படும்.

12–3 **எடுத்துக்காட்டு 1:** $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப் படுகிறது. அச்சங்கிலியின் ஓரலகு எடை ω; சங்கிலி தாங்கக்கூடிய இழுவிசை $n\omega$. 'வீச்சு' $\sqrt{n^2 - l^2}\log\left(\frac{n+l}{n-l}\right)$-க்கு மேற்படக் கூடாதென நிறுவுக.

படம் 12-3·1-ல் AB என்பது வீச்சு $2a$;

$$AN = NB = a$$

வில் ACB என்பது சங்கிலி; அதன் நீளம் $2l$

வில் AC = வில் $CB = l$

OX, ON—x, y அச்சுகள். மீப்பெரு இழுவிசை A, B-ல் செயற்படும். அவ் விழுவிசை, (10)-ன்படி $T = \omega y$

$$= \omega \cdot MB = \omega \cdot y = \omega\sqrt{l^2 + c^2} \qquad \ldots\ldots(8)$$

$OM = a$; எனவே, B-ன் ஆயத்தொலைகள் $(a, \sqrt{l^2 + c^2})$

$$n\omega \sin\phi = T\sin\phi$$

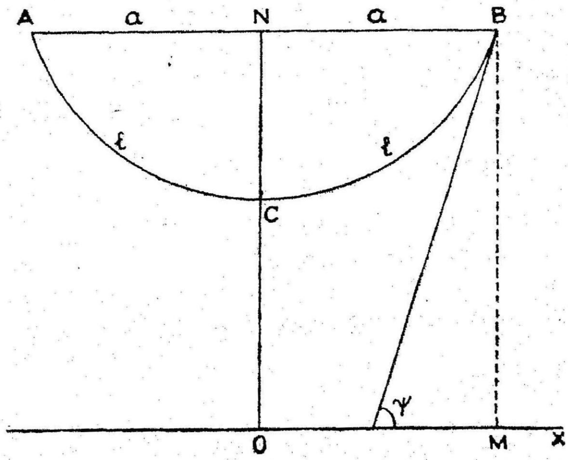
$$= \omega l \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore \quad \sin\phi = \frac{l}{n}$$

$$\sec \phi = \frac{n}{\sqrt{n^2 - l^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{l}{\sqrt{n^2 - l^2}}$$

$$T \cos \phi = T_0 = \omega C = n\omega \cos \phi \quad \ldots \quad \text{(i)}$$



படம் 12-3.1

$$= \frac{n\omega \sqrt{n^2 - l^2}}{n}$$

$$= \omega \sqrt{n^2 - l^2}$$

$$\therefore \quad c = \sqrt{n^2 - l^2}$$

$$2a = 2c \log (\sec \phi + \tan \phi) \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$= 2 \sqrt{n_2 - l^2} \log \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - l^2}} + \frac{l}{\sqrt{n^2 - l^2}} \right)$$

$$= 2 \sqrt{n^2 - l^2} \log \frac{n + l}{\sqrt{(n+l)(n+l)}}$$

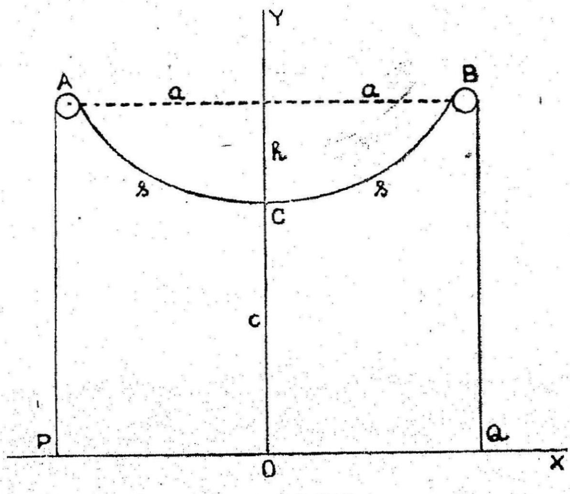
$$= 2 \sqrt{n^2 - l^2} \log \left(\frac{n+l}{n-l} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{n^2 - l^2} \log \left(\frac{n+l}{n-l} \right)$$

என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஒரு சங்கிலி ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு முளைக் குச்சிகளைச் சுற்றி வந்து தொங்குகிறது. அது அசைவற்ற நிலையில் இருக்கும்போது, சங்கிலியின் தன்னிச்சையாக உள்ள முனைகள், அச்சங்கிலி தொங்கும் வடிவமான சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையைத் தொட்டு நிற்குமென நிறுவுக.

(படம் 12-3.2)-ல் *PACBQ* என்ற சங்கிலி, *A*, *B* என்ற முளைகளைச் சுற்றிவந்து கீழே தொங்குகிறது. *P*, *Q* என்பவை அச்சங்கிலி முனைகள். *P*, *Q* என்பவை *x* அச்சை அதாவது



படம் 12-3 2

சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையைத் தொட்டு நிற்கின்றனவென் நிறுவ வேண்டும்.

இவ்வாறு தொங்கும் சங்கிலியின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் சங்கிலியின் இழுவிசை wy என நமக்குத் தெரியும். *A*, *B*-ன் *y* ஆயத்தொலைகள் y_1, y_1 எனக் கொள்க. எனவே *A*, *B*-ல் செயற்படும் இழுவிசைகள் wy_1, wy_1 எனவிருக்கும். இவற்றை ஈடு செய்து, சங்கிலியை அசைவற்ற நிலையில் நிறுத்த *AP*, *BQ* என்ற சங்கிலிப் பகுதிகளின் எடைகள் wy_1, wy_1 ஆக இருக்க வேண்டும். y_1 நீளமுள்ள சங்கிலிப் பகுதி *AP* எனில், *P* என்பது சங்கிலியத்தின் இயக்குவரையைத் தொட்டு நிற்கும். அவ்வாறே *Q* என்ற முனையும் இயக்குவரையைத் தொடும்.

இது ஒரு முக்கியமான செய்தி. இதே கணக்கில் சங்கிலி நீளம்: $2l$ எனவும், வீச்சு $2a$ எனவும், தொய்வு h எனவும் கொண்டால் $y_1 = h + l - \sqrt{2hl}$ என நிறுவுக. அதாவது A, B-லிருந்து செங்குத்தாகத் தொங்கும் சங்கிலிப் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் $h + l - \sqrt{2hl}$ என நிறுவுக.

ACB என சங்கிலிய வடிவத்தில் தொங்கும் பகுதி $2s$ எனக் கொள்க.

$$2l = 2s + 2y_1$$

$$\therefore \quad s = l - y_1$$

தொய்வு h எனக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறபடியால்,

$$y_1 = c + h$$

$$\therefore c = y_1 - h$$

$y_1^2 = c^2 + s^2$ (புள்ளி A-ல் $y^2 = c^2 + s^2$)

$$\therefore \quad y_1^2 = (y_1 - h)^2 + (l - y_1)^2$$

$$= 2y_1^2 + h^2 + l^2 - 2y_1(h + l)$$

$$y_1^2 - 2y_1(h + l) + (h^2 + l^2) = 0$$

$$y_1 = (h + l) \pm \sqrt{(h + l)^2 - (h^2 + l^2)}$$

$$= h + l \pm 2\sqrt{hl}$$

$y_1 < l$ ஆனபடியால்

$y_1 = h + l - 2\sqrt{hl}$ என்ற மதிப்பே பொருத்தமான மதிப்பாகும். எனவே, செங்குத்தாகத் தொங்கும் பகுதிகள் தனித் தனியே $h + l - 2\sqrt{hl}$.

$$\therefore \quad c = y_1 - h$$

$= l - 2\sqrt{hl}$ எனவும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : 110 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கம்பியின் கிடை வீச்சு 109 மீட்டரானல், கம்பியின் தொய்வு என்ன ?

கம்பியின் நீளத்திற்கும் வீச்சுக்கும் வேறுபாடு மிகக் குறைவாயுள்ளபடியால், கம்பி இழுத்துக் கட்டப்பட்டிருக்கிறதெனக் கொள்ளலாம். அதாவது சங்கிலிய முனையில் இழு விசை மிக அதிகம்; எனவே, c என்ற துணையலகு பெரிதெனக் கொள்ளலாம்.

$s = c \sinh \frac{x}{c}$ என்ற வாய்ப்பாட்டின்படி

$$s = c \left\{ \frac{x}{c} + \frac{x^3}{6c^3} + \quad \dots \quad \right\}$$

$$= x + \frac{x^3}{6c^2} \quad \text{(தோராயமாக)}$$

$$\therefore \; c = \sqrt{\frac{x^3}{6(s-x)}}$$

இங்கு $s = 55; \quad x = 54.5$

$$\therefore \; c = \sqrt{\frac{(54.5)^3}{6 \times .5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(54.5)^3}{3}}$$

$= 232.4$ மீட்டர்.

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

$$= c \left\{ 1 + \frac{x^2}{2c^2} \right\}$$

$\therefore$ தொய்வு $= y - c = \frac{x^2}{2c} = \frac{(54.5)^2}{464.8}$

$= 6.4$ மீட்டர் (தோராயமாக)

முன்னர் (14) எனக் கண்ட வாய்பாட்டின்படியும் நாம் கணக்கிடலாம்.

தொய்வு $= \frac{1}{2} \sqrt{6 \times 54.5 \times .5}$

$= \frac{1}{2} \times 12.8$

$= 6.4$ மீட்டர் எனவும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு சங்கிலியத்தில் P என்ற புள்ளியில் இழு விசை T; முனை C–ல் இழு விசை T_o; CP என்ற வில்லின் எடை W எனில் $T^2 - T_o^2 = W^2$ என நிறுவுக.

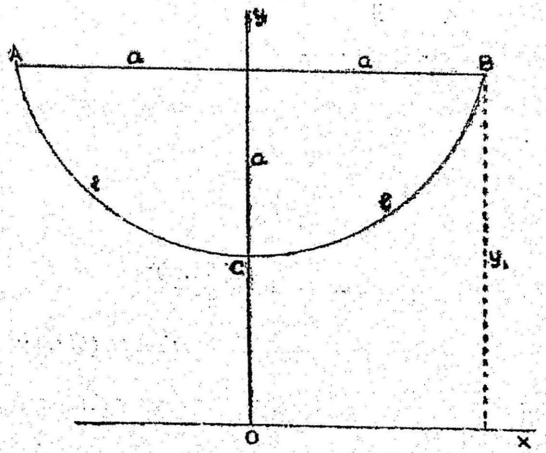
ஓரலகு எடை ω எனவும், சங்கிலியத்தின் துணையலகு c எனவும், P–ன் y-ஆயத்தொலை y எனவும், வில் $CP = s$ எனவும் கொள்க.

$$
\begin{aligned}
T^2 - T_o^2 &= (\omega y)^2 - (\omega c)^2 \\
&= \omega^2 (y^2 - c^2) \\
&= \omega^2 s^2 \text{ (ஏனெனில் } y^2 = s^2 + c^2) \\
&= W^2 \text{ என நிறுவப்படுகிறது.}
\end{aligned}
$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரே கிடைக்கோட்டில் உள்ள இரு புள்ளிகளில் இரு முனைகள் கட்டப்பட்டு ஒரு சங்கிலி தொங்குகிறது. சங்கிலி நீளம் $2l$; வீச்சு $2a$; தொய்வு a எனில்

$$\frac{2a^2}{l^2 - a^2} = \log\left(\frac{l+a}{l-a}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

(படம் 12–3.5)–ல் B–ன் ஆயத் தொலை (a, y_1) எனவும் சங்கிலியத்தின் துணையலகு c எனவும் கொள்க.



படம் 12-3.5.

$y_1^2 = l^2 + c^2$ (வாய்பாடு 8)

$\therefore\ c^2 = y_1^2 - l^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$a = y_1 - c$ (கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது)

$\therefore c = y_1 - a$ ... . **(2)**

(1)-ம், (2)-ம் எடுத்தால்,

$(y_1 - a)^2 = y_1^2 - l^2$ என வரும்.

சுருக்கினால் $y_1 = \dfrac{a^2 + l^2}{2a}$ — என வரும். ... ... (3)

(2)-ல் ஈடு செய்தால் $c = \dfrac{a^2 + l^2}{2a} - a$

$= \dfrac{l^2 - a^2}{2a}$ என வரும். ... (4)

மேலும் $y_1 = c \sec \phi$ (வாய்பாடு 9)

$\therefore \sec \phi = \dfrac{l^2 + a^2}{l^2 - a^2}$

$\therefore \tan \phi = \dfrac{2al}{l^2 - a^2}$

ஆனால், $a = C \log(\sec \phi + \tan \phi)$ (வாய்பாடு (11))

$$= \left(\frac{l^2 - a^2}{2a}\right) \log \left[\frac{l^2 + a^2}{l^2 - a^2} + \frac{2al}{l^2 - a^2}\right]$$

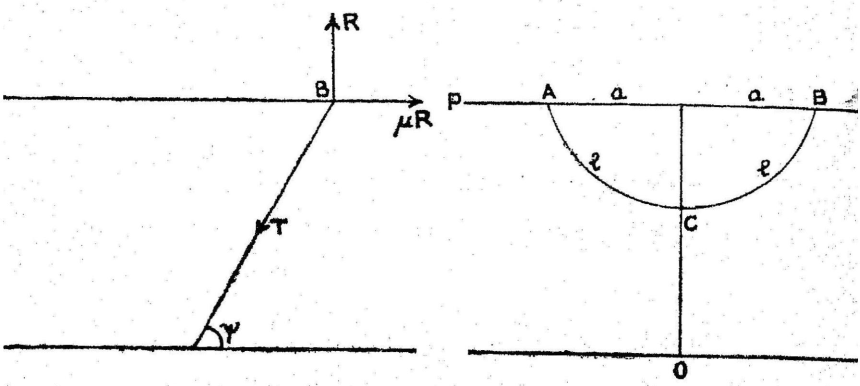
$\dfrac{2a^2}{l^2 - a^2} \log \left(\dfrac{l + a}{l - a}\right)$ என பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

கிடைக்கோட்டிலுள்ள ஒரு சொர சொரப் கம்பியின்மேல், ஒரு சீரான சங்கிலியின் மு கள் மாட்டப்பட்டு, அம் முனைகள் அக் கம்பியை ... கூடும். சங்கிலி முனைகள் அக் கம்பியின் மேல் நகர்ந்து அசைவற்ற நிலையில் வந்து நிற்கின்றன. சங்கிலியின் நீளம் $2l$. அச் சங்கிலியின் மீப்பெரு வீச்சு $2l\mu \log \left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + \mu^2}}{\mu}\right)$ என நிறுவுக.

(μ—உராய்வுக் கெழு.)

(படம் 12-3.6.)-ல் PQ ஒரு மொத்தக் கம்பி. அதன்மேல் ACB என்ற ஒரு சங்கிலியின் முனைகளான A, B நகரக்கூடும். C என்பது அச் சங்கிலி அசைவற்றிருக்கும் நிலையில், சங்கிலி யத்தின் உச்சி. A அல்லது B என்ற முனை அசைவற்ற நிலை



படம் 12.3..6

எல்லையில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். வீச்சு $AB=2a$; வில் $ACB=2\,l$ (சங்கிலி நீளம்) எனக் கொள்க.

அசைவற்ற நிலை எல்லையில் B என்ற சங்கிலி வளையம் BA என்ற திசையில் நகரும் தருணத்திருக்கும். அப்போது B-ல் செயற்படும் விசைகள்:

(தனியாக இடக்கைப் படம் 12–3 6.–ல் காட்டப்பட் டிருக்கின்றன.)

(1) B-ல் தொடுவரைத் திசையில் இழுவிசை T.

(2) B–ல் கம்பியை அழுத்துவதால், B-ல் BA-க்குச் செங் குத்தான திசையில் கம்பியின் எதிர்வினை (விசை) R.

(3) AB-ன் நீட்டலில் உராய்வு எல்லை விசை μR. இலாமித் தேற்றப்படி,

$$\frac{\mu R}{\sin(90+\phi)} = \frac{R}{(\sin 180-\phi)} = \frac{T}{\sin 90}$$

$$\therefore R = T\sin\phi$$

$$\mu R = T\cos\phi$$

$$\therefore \tan \psi = \frac{1}{\mu}$$

சங்கிலிய வாய்பாடு (5)-ன் படி

B-ல், $l = C \tan \psi$

$$\therefore \frac{1}{\mu} = \frac{l}{c}$$

$$c = l\mu.$$

மீப்பெரு வீச்சு [வாய்பாடு (11)]

$$2a = 2c \log(\sec\psi + \tan\psi)$$

$$= 2l\mu \log\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} + \frac{1}{\mu}\right)$$

$$= 2l\mu \log\left(\frac{\sqrt{1+\mu^2} + 1}{\mu}\right)$$

என நிறுவப்படுகிறது.

பயிற்சி 12 (a)

1. 4 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரு கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளினின்றும் தொங்கவிடப் பட்டிருக் கிறது. சங்கிலி முனைகளில் இழு விசை 50. கி. கிராம். சங்கிலி யின் எடை 80 கி. கிராம். சங்கிலியத்தின் உச்சியில் இழு விசை காண்க. (30 கி. கிராம்.)

2. 4 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரு கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளினின்று 0. 5 மீட்டர் தொய்வுடன் தொங்குகிறது. சங்கிலியத்தின் துணையலகு 3. 75 என நிறுவுக.

3. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி, ஒரு கிடைக்கோட்டி லுள்ள இரு புள்ளிகளினின்று h தொய்வுடன் தொங்குகிறது. சங்கிலியத்தின் துணையலகு $\dfrac{l^2-h^2}{2h}$ என நிறுவுக.

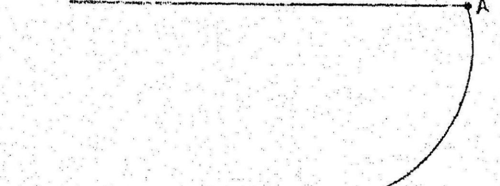
4. l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரே கிடைக்கோட்டி லுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்க விடப்பட வேண்டும். முனைகளில் உள்ள இழு விசை ஒவ்வொன்றும் மிகத் தாழ்ந்த

புள்ளியிலுள்ள இழுவிசையைப்போல் n மடங்கு இருக்க வேண்டுமெனில் வீச்சு $\frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \log\left(n + \sqrt{n^2-1}\right)$ இருக்குமென நிறுவுக.

5. ஒரு கம்பி கிடைத் தளத்திலுள்ளது. $2l$ நீளம், $2l\omega$ எடையுள்ள ஒரு கனமான கயிறு இரு முனைகளிலும் ஒவ்வொரு வளையந்தாங்கி, அவ் வளையங்கள் கம்பியின் மேல் நகரமுடியும். ஒவ்வொரு வளையத்தின் மேலும் $l\omega$ என்ற விசை கிடைக் கோட்டில் செயற்படுகின்றன. இரு வளையங்களுக்கு மிடைப்பட்ட தூரம் $2l \log(1+\sqrt{2})$ என நிறுவுக.

6. $2l$ நீளம், $2l\omega$ எடையுள்ள ஒரு கயிறு, ஒரு கிடைக் கோட்டின் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டிருக்கிறது. அதன் தொய்வு h. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழு விசை $\frac{\omega(l^2-h^2)}{2h}$ என நிறுவுக.

7. ஒரு சீரான கயிறு நீளம் l, எடை $l\omega$ ஒரு முனை புள்ளி A-ல் கட்டப்பட்டு, மற்ற முனை B ஒரு கிடைக் கோட்டில் $\underline{a\omega}$ என்ற விசையால் இழுக்கப் படுகிறது. இந்த நிலையில் அது அசைவற்ற நிலையில் இருக்கிறதெனின், A-க்கும் B-க்கும் உள்ள கிடைத் தூரம், குத்தாய தூரம் முறையே $a \sinh^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$ எனவும் $\sqrt{l^2+a^2} - a$ எனவும் நிறுவுக. (படம் 12–4.1 காண்க.)



படம் 12·4.1.

8. ஒரு சாதாரண சங்கிலியத்தில் A, B என்ற எவையாகிலும் புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட வில் தூரம் l; A, B என்ற புள்ளி

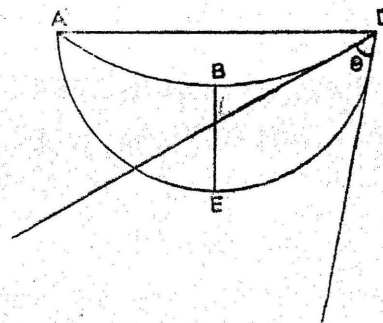
களின் தொடுவரைகள், சங்கிலியத்தின் இயக்கு வரைக்கு α, β சாய்வில் உள்ளன. A, B-க்கு இடைப்பட்ட குத்து தூரம்

$$l \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Big/ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ என நிறுவுக.

9. சென்ற கணக்கில் (8-ல்) $\alpha \sim \beta = 90°$ ஆனால், $A. B.$ என்ற வில்லின் மையத்தில் செயற்படும் இழு விசை, அவ்வில்லின் சரிபாதியின் எடைக்குச் சமம் என நிறுவுக.

10. இரு முனைகளும் இணைக்கப்பட்ட ஒரு சீரான சங்கிலி $A\,B\,D\,E$, (படம் 12–4–2)-ல் காட்டியபடி இரு வழ வழப்பான முளைக் குச்சிகளில் மாட்டப் பட்டிருக்கிறது. இது அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும்போது B, E என்பவை அவ்விரு சங்கிலியங்களின் உச்சிகள். D என்ற புள்ளியில் இரு சங்கிலியங்களுக்கும் வரையப்படும் இரு தொடு வரைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ (படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது).

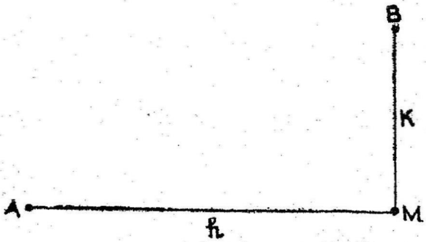
BE: $\frac{1}{2}$ வில் $ABDEA = \tan\frac{\theta}{2}$-என நிறுவுக.



படம் 12·4.2.

11. A, B என்பவை இரு புள்ளிகள்; (படம் 12–4.3)–ல் காட்டியபடி B–லிருந்து A–ன் தூரம் கிடைக்கோட்டில் h; குத்தாயத்தில் K. l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியின் முனைகள் A, B-ல் கட்டப்பட்டு சங்கிலி, குத்துதளத்தில் அசைவற்ற நிலையில் தொங்குகிறது. அந்த சங்கிலி தொங்கும் சங்கிலியத்தின் துணையலகு $2C \sinh \frac{h}{2C} = \sqrt{l^2 - K^2}$ என்ற சமன் பாட்டால் பெறப்படுமென நிறுவுக.

மேற்கூறிய கணக்கில் சங்கிலி ஒரு மீட்டர் நீளம் 2. கி. கிராம் எடை பெற்றது. சங்கிலிக்கு வரையப்படும் தொடுவரை கிடைக் கோட்டில் அமையு மிடத்து, சங்கிலியின் இழு விசை 20 கி. கிராம். அந்தப் புள்ளியிலிருந்து கிடைக் கோட்டில் 10 மீட்டர் தூரமுள்ள சங்கிலிப் பகுதி அப்புள்ளிக்கு மேல் $5\left(l+\frac{1}{l}-2\right)$ உயரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.



படம் 12-4.3

12. A, B என்ற புள்ளிகள் ஒரு குத்துதளத்தில் ஒரே கிடைக்கோட்டில் இல்லாத புள்ளிகள். 180 செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு சங்கிலி A,B ன் மேல் வைக்கப்பட்டு, புள்ளிகளுக்கு இடைப் பட்ட இடத்தில் இல்லாத சங்கிலிப் பகுதிகள் A,B—லிருந்து கிடைத்தரைக்கு செங்குத்தாகத் தொங்குகின்றன; தொங்கும் பகுதிகள் 60 செ—மீ; 66 செ.மீ; நீளம். இந்தச் சங்கிலியத்தின் உச்சி, முழுநீளத்தை 4:5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற தென வும், AB-ன் நீளம் $20\sqrt{2}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{17}{20\sqrt{2}}\right)+\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]$ செ மீ. எனவும் நிறுவுக.

13. 150 மீ. நீளமுள்ள கயிறு கொண்டு ஒருவன் ஒரு பட்டம் பறக்க விட்டிருக்கிருன். கயிற்றின் அலகு எடை ω. கயிறு பிடித்திருக்கும் கையில் இழுவிசை 25 ω. கயிறு கிடைக் கோட்டிற்கு 30° சாய்வில் இருக்கிறது. பட்டம் ஏறக்குறைய 140 மீ. உயரத்தில் பறக்கிறதென நிறுவுக

14. ஒரு பெட்டிப் பட்டம் h உயரத்தில் l நீளம் கம்பி விடப் பட்டு அதன் முனையில் பறக்கிறது. அக் கம்பியின் சங்கிலிய வடி வத்தின் உச்சி தரையில் இருக்கிறது. பட்டத்தினருகில் சங்கிலி யத்திற்கு வரையப்படும் தொடுவரை, கிடைக் கோட்டிற்கு ϕ

அளவு சாய்வில் உள்ளது. கம்பியின் அலகெடை w எனக் கொண்டால் பட்டத் தருகில் கம்பியின் இழுவிசை = $\frac{1}{2}\left(\frac{l^2+h^2}{h}\right)$ w எனவும், $\phi = 2\tan^{-1}\left(\frac{h}{l}\right)$ எனவும் நிறுவுக. ($y^2 = s^2+c^2$; $s = c\tan\phi$; பட்டத்தினருகில் $y = c+h$ என்பவற்றைப் பயன்படுத்துக.)

15. l நீளமுள்ள ஒரு தந்திக்கம்பி a அளவு வீச்சோடு இழுத்துப் பிடித்துக் கட்டப்பட்டிருக்கிறது; தொய்வு மிகச் சிறிது h. $3a\,(l-h) = 8\,h^2$ என்பது தோராயமாக உண்மையென நிறுவுக.

16. மேற்கூறிய கணக்கில் அலகெடை w எனக் கொண்டால், கட்டப்பட்டிருக்கும் முனைகளில் இழுவிசை ஏறக்குறைய $w\left(\frac{a^2}{8h}+\frac{7h}{6}\right)$ என நிறுவுக.

17. l நீளமுள்ள ஒரு கனமான சங்கிலி, ஒரு முனை ஒரு சொர சொரப்பான மேசைமேலும், மற்றொருமுனை, ஒரு சொர சொரப்பான தரை மேலும் அசைவற்றநிலை எல்லையில் இருக்கிறது; உராய்வுக்கெழு இரண்டிற்கும் μ; மேசை தரையிலிருந்து b உயரம்.

$l > b + \frac{b}{\mu}$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் தரைமேலிருக்கும் சங்கிலிப் பகுதி நீளம்

$$\frac{\mu}{4}\left\{b+\frac{2l}{\mu}-\sqrt{b^2+\frac{4lb}{\mu}}\right\}-\frac{b}{2\mu}$$

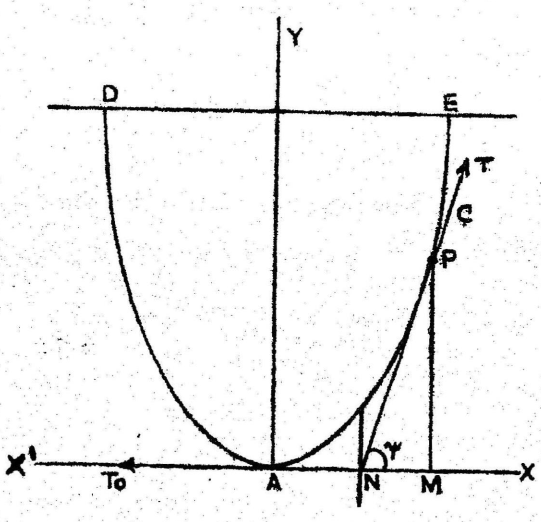
என நிறுவுக.

18. A என்ற புள்ளி வழியாக ஒரு சொர சொரப்பான கனக் கம்பி கிடைக் கோட்டில் பொருத்தப் பட்டிருக்கிறது. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு கனமான சங்கிலியின் ஒரு முனை A-ல் கட்டப் பட்டு, மற்றொரு முனை, அக்கம்பியில் நகரக்கூடிய ஒரு வளையத்தோடு பிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. வளையத்தின் எடை சங்கிலியின் எடையைப் போல, n மடங்கு; μ, உராய்வுக் கெழு. அசைவற்ற நிலை எல்லையில் அச்சங்கிலியும் வளையமும் இருக்குமானால், A-லிருந்து வளையத்தின் தூரம் $\frac{2l}{\lambda}\log(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})$ என நிறுவுக. ($\lambda = \frac{1}{\mu(2n+1)}$ எனக் கொள்க.)

பரவளையச் சங்கிலியம்

(Parabolic Catenary)

12-5. தேற்றம் : ஒரு கனமான சங்கிலி இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டிருக்கிறது. அது சீரான சங்கிலியல்ல; ஆனால், ஒவ்வொரு பகுதியின் எடையும், அப்பகுதியின் கிடைக்கோட்டு வீச்சத்திற்கு (Projection of the element on the horizontal) நேர்த்தகவுப் பொருத்தத்தில் உள்ளது. புவியீர்ப்பு சக்தி மட்டுமே அச் சங்கிலிமேல் செயற்படின், அச்சங்கிலி தொங்கும் வடிவம் ஒரு பரவளைய வடிவமாகும்.



படம் 12-5.

(படம் 12-5.)-ல் காட்டியபடி D, E என்ற புள்ளிகளில் சங்கிலி முனைகள் கட்டப்பட்டு, சங்கிலி தன்னிச்சையாகத் தொங்குகிறது; மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி A. A வழியாக வரையப்படும் தொடுகோடு கிடைக் கோடாயிருக்கும். அதை x அச்சு AX என்வும், $AY \perp AX$ என்று y அச்சும் எடுத்துக்கொள்க.

AP என்ற சங்கிலிப்பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். AX, AY என்ற ஆய அச்சுகளையொட்டி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனக்கொள்க.

படத்தில் $AM = x$

$$MP = y$$

AM—ன் மையப்புள்ளி N எனக் கொள்க. கொள்கைப்படி AP என்ற சங்கிலிப்பகுதியின் எடை, x அச்சின்மேல் AP—ன் வீச்சமான AM—க்கு, அதாவது x-க்கு நேர்த்தகவுப் பொருத்தத்தில் உள்ளது ; எடை ωx எனவும், அது N—ல் செங்குத்தாகக் கீழே செயற்படுகிற தெனவும் கொள்ளலாம்.

இப்போது AP என்ற சங்கிலிப்பகுதிமேல் மூன்று விசைகள் செயற்படுவதால், அசைவற்ற நிலையிலுள்ளது; செயற்படும் விசைகளாவன:

(1) அதன் எடை ωx; N என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாகக் கீழே.

(2) P—ல் தொங்கு வரைக்குத் தொடுவரையான PC—ன் மேல், சங்கிலியின் இழுவிசை T செயற் படுகிறது; திசை-$\bar{P}C$;

(3) A—ல் கிடைக் கோட்டில் செயற்படும் இழு விசை T_o

இம் மூன்று விசைகளும் AP என்ற பகுதியின் மேல் செயற்படுவதால், அப்பகுதி அசைவற்ற நிலையிலுள்ளது. எனவே, அம் மூன்று விசைகளும் இணைகோடுகளில் செயற்பட வேண்டும்; அல்லது மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். சந்திக்கும் புள்ளி N என நாம் எளிதில் அறிந்து கொள்ளலாம். எனவே, இலாமித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால்

$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{T_o}{\sin(90^\circ + \phi)} = \frac{\omega x}{\sin(180^\circ - \phi)}$$

$$\therefore T \sin \phi = \omega x \qquad \ldots \quad (1)$$

$$T \cos \phi = T_o \qquad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{\omega x}{T_o}$$

T_0 என்பது x அச்சின்மேல் c அளவு நீளத்திற்குரிய எடை ω எனக்கொள்க.

அப்போது $\tan\phi = \dfrac{\omega x}{\omega c}$

$$= \frac{x}{c}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{c} \qquad (3)$$

$$\therefore c\int dy = \int x\,dx$$

$$c\,y = \frac{x^2}{2} + K \quad (K\text{–மாறிலி})$$

$x = 0, y = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டை ஏற்ருல், அதாவது மிக்த் தாழ்ந்த புள்ளி A என்பதே ஆய ஆதியெனக் கொண்டால் $0 = 0 + K$ என வரும்.

எனவே AX, AY என்ற அச்சுக்களையொட்டி

$$x^2 = 2\,c\,y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்பது அச்சங்கிலியின் வடிவச் சமன்பாடு. இது ஒரு பரவளையம்; செவ்வகலம் $2c$; y அச்சையொட்டி சமச் சீருடையது; ஆய ஆதியில் பரவளையத்தின் உச்சி (Vertex of the Parabola) இருக்கிறது.

(1), (2) இரண்டையும் இருபடியாக்கிக் கூட்டிஞல்

$$T^2 = \omega^2 x^2 + T_0^2$$

$$= \omega^2 (x^2 + c^2)$$

$$= \omega^2 (2\,c\,y + c^2)$$

$\therefore$ இழுவிசை $T = \omega\sqrt{2\,c\,y + c^2} \quad \ldots \quad (5)$

$$T_0 = \omega\,c$$

$$= \frac{\omega x^2}{2y} \quad \ldots \quad (6)$$

T_0, T, ωx என்ற விசைகள் அசைவற்ற நிலையில் இருப்பதால் அவற்றினை முறையாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால் குறிப்பிடலாம். அந்த விசை முக்கோணம் PNM.

$$\frac{T_0}{NM} = \frac{\omega x}{MP} = \frac{T}{PN}$$

அதாவது $$\frac{T_0}{\frac{x}{2}} = \frac{\omega x}{y} = \frac{T}{PN} = \frac{T}{\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore T = \frac{\omega x \sqrt{x^2 + 4y^2}}{2y} \qquad \dots \qquad (7)$$

$$T_0 = \frac{\omega x^2}{2y} \qquad \dots \qquad (8)$$

என, ஏதாவதொரு புள்ளி (x, y)-ல் இழு விசையும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் இழு விசையும் பெறப்படுகின்றன.

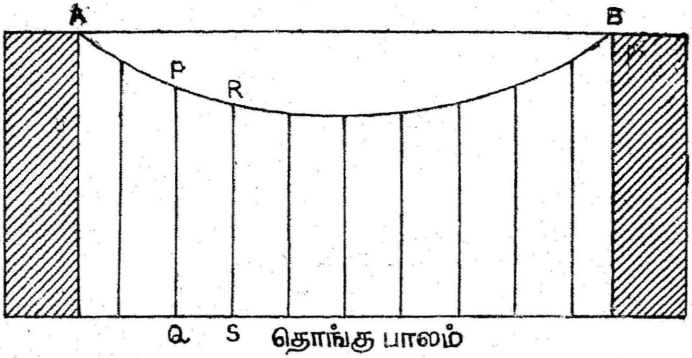
எல்லா y-க்கும், $x\sqrt{x^2 + 4y^2} > x^2$ ஆனபடியால் எப்போதுமே $T > T_0$.

அதாவது மீச்சிறு இழு விசை அடிப் புள்ளியில் செயற்படுகின்றது எனவும் பெறப்படுகின்றது.

12-6. **தொங்கும் பாலங்கள் :** இந்தப் பரவளைய வடிவம் தாங்கிய சங்கிலியக் கொள்கையின் அடிப்படையில், தொங்கு பாலங்களைப் பற்றி நாம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

இரண்டு பலமான உயரமான கட்டைகள் கட்டி AB என்ற ஒரு பலமான கம்பி வடம் முனைகள் அக் கட்டைகளில் கட்டப்படுகிறது. (படம் 12-6. காண்க.) இது மாதிரி மற்றோர் அமைப்பு சற்றுத்தள்ளிக் கட்டப்படுகிறது. இக் கம்பி வடத்தில் பல புள்ளிகளிலிருந்து செங்குத்தான சங்கிலிகள் (முறுக்கேறிய கம்பிகள்) தொங்குகின்றன. இச் சங்கிலிகள் பாலத்தின் சாலையைத் தாங்கி நிற்கின்றன.

இச் சங்கிலிகளின் மேல் முனைகள் இறுக்கமாக, கம்பி வடம் AB–ல் சமமான இடைவெளிகளில் பிணைக்கப்பட்டுச் செங்குத்



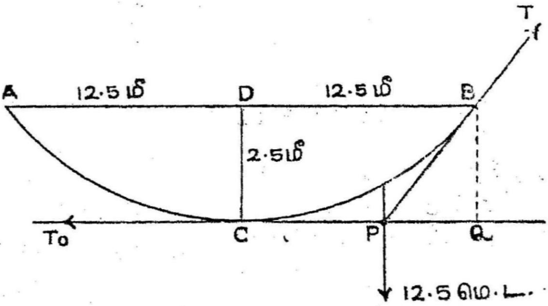
படம் 12-6.

தாகத் தொங்குகின்றன. (படம் 12-6.)–ல் PQ அவ்வித சங்கிலி யொன்று. மற்ற சங்கிலிகள் PQ–க்கு இணை கோடுகளாகத் தொங்குவதைப் படத்தில் காண்க. சங்கிலிகளின் கீழ் முனைகள் சாலையைத் தாங்கி நிற்கும். சாலையின் எடை மிகப் பெரிதாயிருக்கும். இவ் வெடையோடு சங்கிலிகளின் எடைகளையோ AB என்ற கம்பி வடத்தின் எடையையோ **ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்** மிகச் சிறிதாகும். எனவே கம்பி வடம் PQ-ம் சங்கிலி PQ, RS என்ற இரண்டும் தாங்கும் எடை QS என்ற சாலையின் எடைக்குத் தோராயமாக சமமெனக் கொள்ளலாம். இதுவே நாம் பரவளையச் சங்கிலியத்தின் அடிப்படையாகக் கொண்ட கொள்கையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு தொங்கு பாலத்தின் வீச்சம் 25 மீட்டர்; மையத் தொய்வு $2\frac{1}{2}$ மீட்டர். இப் பகுதி 25 மெட்ரிக் டன் எடையுள்ள சாலையைத் தாங்குகிறதெனில், மீப்பெரு, மீச்சிறு இழு விசைகளைச் கணக்கிடுக.

(படம் 12–7)–ல் ACB என்பது தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம். C அக் கம்பி வடத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி.

CPQ என்பது C-ல் ACB என்ற வில்லுக்கு வரையப்பட்ட தொடுவரை.



படம் 12-7.

$CD \perp AB$; $CD = 2.5$ மீ $= BQ$.

$AD = DB = 12.5$ மீட்டர்.

மீச்சிறு இழு விசை T_o (C-ல்)

மீப்பெரு இழு விசை T (B-ல்)

CB என்ற பகுதி தாங்கும் எடை 12.5 மெ. டன். அது CQ-ன் மையப் புள்ளியான P வழியாகச் செயற்படும். எனவே, $CP = 6.25$ மீ. $= PQ$.

T (B-ல்), T_o (C-ல்), 12.5 மெ. டன் (P-ன் வழியாக) செயற்படுவதால் அசைவற்ற நிலை உருவாகிறது.

எனவே, T என்பது P வழியாகச் செல்லல் வேண்டும். ΔTPQ என்பது இம் மூன்று விசைகளுக்குரிய விசை முக்கோணம்.

அதில் $PQ = 6.25$ மீ. $QB = 2.5$ மீ.

$$\therefore \quad PB = \sqrt{(6.25)^2 + (2.5)^2}$$

$$= 1.25\sqrt{29} \text{ மீ.}$$

$$\therefore \quad \frac{T}{1.25\sqrt{29}} = \frac{T_o}{6.25} = \frac{12.5}{2.5} = 5$$

$\therefore \quad T = 6.25\sqrt{29}$ மெ. டன் (மீப்பெரு இழு விசை)

$T_0 = 31.25$ மெ. டன் (மீச்சிறு இழு விசை)

பயிற்சி 12 (b)

1. ஒரு தொங்கு பால வீச்சம் 100 மீட்டர்; தொய்வு 10 மீட்டர்; இரண்டு சங்கிலிகள் சேர்ந்து மீட்டருக்கு 1 மெ.டன் எடை தாங்கி நிற்கின்றன. மீச்சிறு, மீப்பெரு இழு விசைகளைக் காண்க.

2. இரு சங்கிலிகள் தாங்கும் சாலையின் எடை 160 மெ. டன். இது சமமாக 30 மீட்டர் வீச்சத்தில் பரவலாக இருக்கிறது. சங்கிலித் தொய்வு 4 மீட்டர். மீப்பெரு, மீச்சிறு இழு விசைகள் காண்க.

3. ஒரு சங்கிலி தொங்கும் வீச்சம் 30 மீட்டர்; தொய்வு 10 மீட்டர்; அச் சங்கிலி வீச்சத்தில் மீட்டருக்கு 0.5 மெ. டன் எடை தாங்குகிறது. சங்கிலி கட்டப்பட்டிருக்கும் இடம் ஒவ்வொன்றிலும் இழு விசை 9.375 மெ. டன் என நிறுவுக.

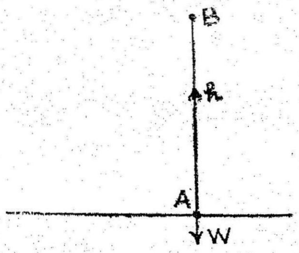
4. 200 மீட்டர் வீச்சம், 20 மீட்டர் தொய்வுள்ள இரண்டு சங்கிலிகளாலான தொங்கு பால எடை, மீட்டருக்கு 2 மெ.டன் மீப்பெரு, மீச்சிறு இழு விசைகளைக் காண்க.

13. கற்பித வேலை

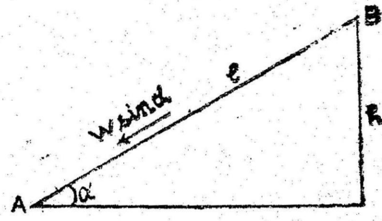
(Virtual Work)

13–1. வேலை : ஒரு கனமான கல்லை நாம் ஒரு கிடைத்தளத்திலிருந்து செங்குத்தாகத் தூக்கும்போது நாம்வேலை செய்கிறோம். நாம் செய்யும் வேலையை எந்த அளவு கோலில் அளக்கலாம் ?

நாம் கல்லைத் தூக்கும்போது கல்லின் எடை W செங்குத்தாகக் கீழே செயற்படுகிறது; செயற்படும் புள்ளி அக்கல்லின் புவியீர்ப்பு மையம். w என்றவிசை செயற்படும் புள்ளியை, விசை செயற்படும் நேர் கோட்டில் h உயரம் மேலே தூக்கினால், நாம் செய்யும் வேலை $w \times h$ என்று அளக்கப்படுகிறது.



படம் 13-1. (i)



படம் 13-1. (ii)

[படம்–1. (i)]–ல் A–ல் உள்ள W எடையுள்ள கல், A–லிருந்து B-க்குச் செங்குத்தான கோட்டில் — அதாவது W செயற்படும் நேர்கோட்டில்—மேலே தூக்கப்படுவது காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அப்படியில்லாமல் [படம் 13– 1. (ii)]-ல் உள்ளபடி, A–ல் இருக்கும்

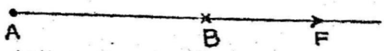
கல், $A\,B$ என்ற சாய்தளத்தின்மேலே இழுக்கப்பட்டு (சாய்தளத்தில் உராய்வேயில்லை யெனக் கொள்க) h உயரத்திற்கு மேலே வருமானாலும், செய்யப்படும் வேலை $W.h$ என்பதேயாகும்; ஏனெனில், சாய்தளத்தில் $W \sin \alpha$ என்ற விசைதான் செயற்படுகிறது. $W \sin \alpha$ என்ற விசை செயற்படும் புள்ளி அவ் விசை செயற்படும் நேர்கோட்டிலேயே B–க்குவர l தூரம் நகர்ந்திருக்கிறது. எனவே, செய்யப்பட்ட வேலை

$$W \sin \alpha \times l = W \times l \sin \alpha = W \times h$$

என்பதேயாம். இது ஒரு சிறப்பான எடுத்துக் காட்டு. இந்தப் பின்னணியில் ''வேலை'' என்பதை வரையறுப் போம்.

வேலை — வரையறையும் அளவும்

ஒருவிசை செயற்படும் புள்ளி விசைசெயற்படும் திசையிலேயே நகருமானால், அவ் விசை வேலை செய்கிறது; விசையின் அளவை அவ்விசை செயற்படும் புள்ளியானது செயற்படும் நேர் கோட்டில் நகரும் தூரத்தால் பெருக்கிவரும் தொகையே செய்யப்பட்டவேலையின் அளவு.



படம் 13-1. (iii)

விசை F. செயற்படும் புள்ளி A. செயற்படும் நேர் கோடு AB. AB-ன் மேல் செயற்படும் புள்ளி A–லிருந்து Bக்கு நகர்கிறது.

செய்யப்பட்ட வேலை $F \times AB$.

[படம் 13-1. (iii)]–ல் இது காண்க.

குறிப்புகள் (1) மாடு முயன்று வண்டியிழுக்கும் போது, மாடு வேலை செய்கிறது; மாட்டின் முயற்சிதான் இங்கு விசை.

(2) மனிதன் முயன்று கல்லைத்தூக்கும்போது மனிதன் வேலை செய்கிறான்; மனிதன் முயற்சிதான் இங்கு விசை.

(3) கடிகாரச் சாவியைச் சுழற்றி, மனிதன் கடிகாரத்திற்குச் சாவி கொடுக்கும்போது, மனிதன் வேலை செய்கிறான், சுழற்றுவதில் செலவிடப்படும் மனித முயற்சியே இங்கு விசையாகும்.

''வேலையின் அளவு'' $= F \times AB$ என்று கூறினோம்.

13-2. தேற்றம் 1: ஒருதுகள்மேல் செயற்படும் விசைகள் அத் துகளை அசைவற்ற நிலையில் இருத்துமானால், அத் துகள் ஒரு நுண்ணிய இடப்பெயர்ச்சி பெறுங்கால் அவ் விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

தெரிப்பு : விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற்கூட்டுத் தொகை = அவ்விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செய்யும் வேலைக்குச் சமம்). அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலையை உரு வாக்குவதால், அவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சிய மாகிறது. எனவே, அவ் விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற்கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகிறது.

மறுதலைத் தேற்றம்

பல விசைகளால் இயக்கப்படும் ஒரு துகள் உண்டு; அத் துகள் நுண்ணிய இடப் பெயர்ச்சி பெறுங்கால், அவ் விசை கள் தனித்தனியே செய்யும் வேலைகளின் இயற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால், அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலை தரும் — அதாவது அத் துகள் அசைவற்றிருக்கும்.

தெரிப்பு : அவ் விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற் கூட்டு = அவ் விசைகளின் (கூட்டு) விளைவு விசை செய்யும் வேலை என்பது நமக்குத் தெரியும். கொடுக்கப்பட்டபடி, முதல் மதிப்பு பூச்சியமாதலால், அதற்குச் சமமான இரண்டாம் மதிப்பும் பூச்சியமாகும்; அதாவது (கூட்டு) விளைவு விசை செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

இது எப்போது நிகழுமெனில்,

(1) (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியமாக விருக்கவேண்டும்.

அல்லது

(2) இடப் பெயர்ச்சியானது, விசையின் திசைக்குச் செங்குத்தான திசையிலிருக்க வேண்டும்.

இடப் பெயர்ச்சி எந்தத் திசையிலும் இருக்கும் போது, முதல் கட்டுப்பாடுதான், அதாவது (கூட்டு) விளைவு விசைதான் பூச்சியமாக வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு வருகிறது. எனவே, இடப் பெயர்ச்சி எத்தன்மைத் தாயினும், இங்குப் பொருந் துவது (கூட்டு) விளைவு விசை பூச்சியம் என்பதே. அப்போது அசைவற்ற நிலை ஏற்படும்.

இந்த இரு தேற்றங்களின் அடிப்படையில்தான் கற்பித வேலைக்கொள்கை கட்டப்பட்டிருக்கிறது. 'கற்பித' என்ற அடைமொழியை 'வேலை'யோடு சேர்ப்பதால், நாம் நிலையியலில் உள்ள கருத்துகளையே வற்புறுத்துகிறோம்; இடப் பெயர்ச்சி ''கற்பனையே'' என்பதும் வலியுறுத்தப்படுகிறது.

''வேலை மதிப்பை நாம் காணும் போது, மிக நுண்ணிய ''கற்பனை''ப் பெயர்ச்சியையே எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

இக் கொள்கையை ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் அல்லது பல பொருள்களை யெடுத்துக் கொண்டும் நிறுவிக் காட்டலாம். அப் பொருள் அல்லது பொருள்களின் மேல் வெளி விசைகள் செயற்பட்டு அப் பொருளை அல்லது பொருள்களை அசைவற்ற நிலையில் வைக்கின்றன என்பதே ஏற்கப்படுகிறது.

இதற்குரிய விரிவுபட்ட தேற்றம் பின்வருமாறு :

13-2.1. **தேற்றம் 2 : ஒரு பொருள் மேல் பல விசைகள் செயற்பட்டு அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையில் இருக்கிறது. அப் பொருளுக்குரிய வடிவ கணித கட்டுப்பாடுகள் குலையாத வண்ணம், ஒரு நுண்ணிய கற்பித இடப்பெயர்ச்சி ஏற்பட்டால், இக் கற்பித இடப் பெயர்ச்சி காரணமாக, அவ் விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.**

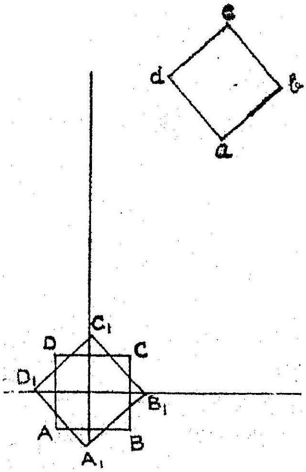
மறுதலையாக, மேற்கூறிய இயற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானால், அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும். (அல்லது அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலையை உருவாக்கும்.)

தெரிப்பு : காணுமுன் ஒரு சிறு செய்தியை விளக்குவோம்.

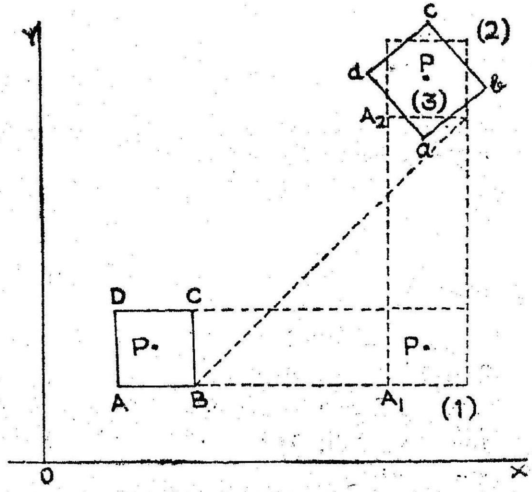
ஒரு தளத்தில் உள்ள பொருள், அதே தளத்தில் மற்றோர் இடத்திற்கு இடம் பெயர்கிறது. அவ் விடப் பெயர்ச்சி எப்படி வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். ஆனால், அவ் விடப் பெயர்ச்சியை இரு கூறுகளாகப் பிரித்து முதலில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைக்கு வந்து, அதற்குப் பின் இடம் பெயர்ந்த நிலைக்கு மற்றொரு முறையில் கொண்டு வந்து நிறுத்தலாம் :

முதற் கூறு : வெறும் இடப் பெயர்ச்சி இயக்கம். (Motion of Translation)

இரண்டாம் கூறு : சுழற்சி இயக்கம் (Motion of Rotation) OX, OY என மரபுப்படி x, y அச்சுகள் கொள்க. $ABCD$ என்ற பொருள் $a\ b\ c\ d$ என்ற நிலைக்கு நகர்ந்திருக்கிற தெனக் கொள்வோம். இந் நகர்ச்சியைப் பின்வரும் தொடர்ச் சியில் காணலாம்.



படம் 13-2.1. (i)



படம் 13-2.1 .(ii)

படம் 13-2.1.

$ABCD$ஐ முதலில் x அச்சுக்கு இணையாக [படம் 13-2.1 (ii)-ல் காட்டியபடி நகர்த்தி (1) என்ற நிலைக்குக் கொண்டு வருவோம். A என்பது A_1.க்கு வரும். பின்னர் (2) என்ற நிலைக்கு வர, A_1BCD என்பதை y அச்சுக்கு இணையாக நகர்த்தி (2) என்ற நிலைக்குக் கொண்டு வருவோம்; அதாவது A_2BCD. பின்னர் A_2BCD ஐ O-ன் வழியாகச் செல்லும் ஒரு செங்குத்து அச்சுக்கு இணையான ஓர் அச்சையொட்டி சுழற்றி $a\ b\ c\ d$ என்ற நிலைக்குக் கொண்டு வருவோம். அதுதான் கடைசி நிலை. (3). அதாவது இப்போது நகர்ச்சி.

(1) x அச்சுக்கு இணையாக $\underline{a}$ தூரம்

(2) பின்னர் y ,, ,, $\underline{b}$ தூரம்

(3) பின்னர் ஒரு குத்தச்சை யொட்டி α என்ற கோண அளவு சுழற்சி

என்ற மூன்று கூறுகளாக அமைவதைக் காண்க.

(1)ஐயும் (2)ஐயும் இரு பிரிவாகக் கொள்ளாமல் திசைவேக இணைகர விதிப்படி *ABCD* என்ற நிலையிலிருந்து, நேராக (2) என்ற நிலைக்கு ஒரே திசையில் இடப் பெயர்ச்சி செய்து கொண்டு வரலாம். இது வெறும் இடப் பெயர்ச்சி; சுழற்சியும் சேர்ந்தால் *ABCD* என்ற நிலையிலிருந்து *a b c d* என்ற நிலைக்குக் கொண்டு வரலாம்.

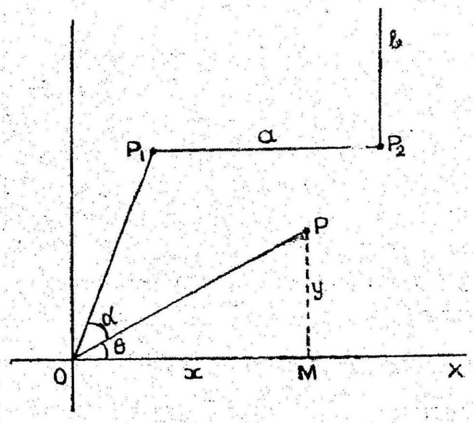
இது எந்த உருவந்தாங்கிய பொருளுக்கும் பொருந்துவதை உணர்க.

மேற்கூறிய இடப் பெயர்ச்சிகளும், சுழற்சியும் எந்த வரிசையிலும் ஏற்படலாம்; அதாவது

(1) முதலில் சுழற்சியும்,

(2) பின்னர் *y* அச்சுக்கு இணையாக *b* தூரமும்,

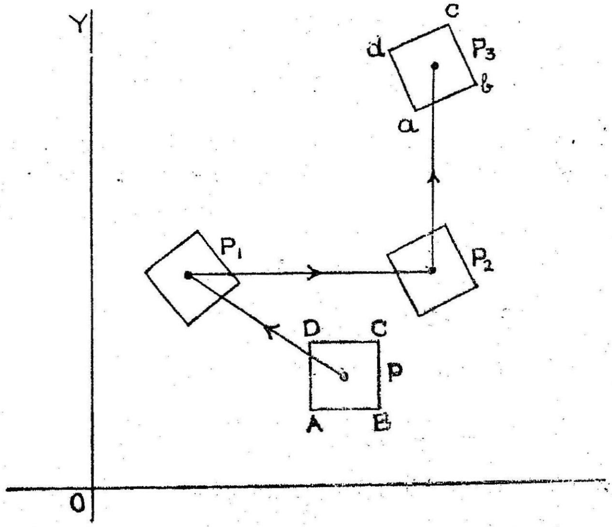
(3) பின்னர் *x* அச்சுக்கு இணையாக *a* தூரமும் சுழற்சியும், பெயர்ச்சியும் ஏற்படலாம். எந்த வரிசையில் இவை யேற்பட்டாலும், பொருள் ஒரு நிலையிலிருந்து மற்றொரு நிலைக்கு வரலாம். இக் கருத்துகளைக் கொண்டு நாம் தேற்றத்தை நிறுவ முற்படுவோம்.



படம் 13-2.1.1. (i)

OX, OY என இரு செங்குத் தச்சுச் சட்டம் எடுத்துக் கொள்வோம். [படம் 13-2.1.1. (i) காண்க]

P என்ற முதல் நிலை, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு துகள். P-ல் ஒரு விசை R செயற்படுகிறது; செயற்படும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனக் கொள்க. XOY தளத்



படம் 13-2.1.1. (ii)

திற்குச் செங்குத்தான OZ என்ற அச்சை மையங் கொண்டு, அப் பொருள் α என்ற கோண அளவு சுழலட்டும். இப்போது P_1 என்ற நிலைக்கு வரட்டும். பின்னர் அப் பொருள் x அச்சுக்கு இணையாக இடப் பெயர்ச்சி பெறட்டும்; அப்போது P-ன் நிலை P_1-லிருந்து P_2 என்ற நிலைக்கு வரட்டும்; $P_1 P_2 = \underline{a}$ எனக் கொள்க.

பின்னர் அப் பொருள் y அச்சுக்கு இணையாக இடப் பெயர்ச்சி பெறட்டும்; அப்போது, P என்ற துகள், முதலில் P_1-க்கு வந்து, பின்னர் P_2-க்கு வந்து, இப்போது P_3 என்ற நிலைக்கு வரட்டும்.

[தனியாக $ABCD$ என்ற பொருளில் P இடம் பெயர்ந்து வருவதை, [படம் 13-2.1·1. (ii)]-ல் விளக்கமாகக் காண்க.]

$OP = r$ எனக் கொண்டால்,

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

(x, y)-ல் உள்ள துகள் P என்பது P_3 என்ற நிலைக்கு இடப் பெயர்ச்சி பெற்ற பின்பு,

P_3-ன் ஆயத் தொலைகள்,

$$x_1 = r\cos(\theta + \alpha) + a \quad \ldots \quad (1)$$

$$y_1 = r\sin(\theta + \alpha) + b \quad \ldots \quad (2)$$

'α' என்ற கோணம் மிக நுண்ணிதெனக் கொண்டு, $\sin\alpha = \alpha$, $\cos\alpha = 1$ என்ற தோராய மதிப்புக்களை ஏற்றால்,

$$x_1 = r\cos\theta - \alpha r\sin\theta + a \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_1 = r\sin\theta + \alpha r\cos\theta + b \quad \ldots \quad (4)$$

$\therefore$ x ஆயத் தொலையில் ஏற்படும் பெயர்ச்சி,

$$= a - \alpha r\sin\theta \quad \ldots \quad (5)$$

y ஆயத் தொலையில் ஏற்படும் பெயர்ச்சி

$$= b + \alpha r\cos\theta \quad \ldots \quad (6)$$

OX, OY என்ற அச்சுத் திசைகளில் R என்ற விசையின் (P என்ற துகளின் மேல் செயற்படும் விசை) X, Y எனக் கொண்டால், R செய்யும் கற்பித வேலையும், X, Y இரண்டும் சேர்ந்து செய்யும் கற்பித வேலையும் சமமாகும். X, Y செய்யும் கற்பித வேலைகள் முறையே,

$X(a - \alpha r\sin\theta)$ எனவும் .... (7)

$Y(b + \alpha r\cos\theta)$ எனவும் .... (8)

பெறப்படும்.

இவ்வாறே மற்ற விசைகள் செய்யும் கற்பித வேலைகளையும் கணக்கிடலாம்.

இவ்வாறாக அக்கட்டிறுக்கப் பொருளின் மேல் செயற்படும் எல்லா விசைகளின் கற்பித வேலைகளின் இயற் கூட்டுத் தொகை,

$\sum X(a-\alpha r \sin\theta) + \sum Y(b+\alpha r \cos\theta)$
என வரும். இதை

$a\sum X + b\sum y + \alpha \sum (Yr \cos\theta - Xr \sin\theta)$ என எழுதலாம்.

அதாவது $a\sum X + b\sum Y + \alpha \sum (Yx - Xy)$ என எழுதலாம். அவ் விசைகள் செயற்படுவதால் அசைவற்ற நிலை ஏற்படுமாயின், தனித்தனியே

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum (Yx - Xy) = 0$$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவையாதலின்,

$a\sum X + b\sum Y + \alpha \sum (Yx - Xy) = 0$ என்ற சமன்பாடு உண்மையாகிறது.

எனவே, அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலையை உருவாக்குமாயின், கற்பித வேலைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகிறது.

மறுதலையாக,

கற்பித வேலைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானல், அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் அல்லது அசைவற்ற நிலையைத் தரும்.

கற்பித வேலைகளின் கூட்டுத் தொகை,

$a\sum X + b\sum Y + \alpha \sum (Yx - Xy) = 0$ என்பது எல்லா நுண்ணிய இடப் பெயர்ச்சிகளுக்கும் உண்மை யெனக் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. அப்படியானல், அசைவற்ற நிலை ஏற்படுகிறதென்பதை நிறுவ வேண்டும்.

முதலில், x அச்சுக்கு இணையாக மட்டும் a அளவு இடப் பெயர்ச்சி ஏற்படுகிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது $b = 0$, $\alpha = 0$ ஆகும்.

$\therefore a\sum X = 0$

எனவே, $\sum X = 0$ எனப் பெறுகிறேம்.

அவ்வாறே, y அச்சுக்கு இணையாக மட்டும் ஒரு நுண்ணிய இடப் பெயர்ச்சி ஏற்படுகிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது $a = 0$, $\alpha = 0$ ஆகும்.

$$\therefore b \sum Y = 0$$

எனவே, $\sum Y = 0$ எனப்பெறுகிறோம். அவ்வாறே α என்ற நுண்ணிய சுழற்சி மட்டும் ஏற்படுகிற தெனக் கொள்வோம். அப்போது $a = 0, b = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \alpha \sum (Yx - Xy) = 0$$

எனவே, $\sum (Yx - Xy) = 0$ எனப் பெறுகிறோம். ஆகவே, $\sum x = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum (Yx - Yy) = 0$ என்று தனித் தனியான சமன்பாட்டு நிபந்தனைகளை

$$a \sum X + b \sum Y + \alpha \sum (Yx - Xy) = 0$$

எனக் கொடுக்கப்பட்ட கொள்கையினின்றும் பெறுகிறோம். இந் நிபந்தனைகள், அவ் விசைகள் அசைவற்ற நிலையை உருவாக்கும் என நாம் காண்கிறோம்.

$$a \sum X + b \sum Y + \alpha \sum (Yx - Xy) = 0$$

என்பது கற்பித வேலைச் சமன்பாடு எனக் கூறப்படும்.

13-3. கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டமைப்பில் நாம் விலக்கக் கூடிய விசைகள்:

(1) ஒரு கயிறு உள்ள அமைப்பின் மேல், பல விசைகள் செயற்படுங்கால், கயிறு நீள வில்லையானல், அக் கயிற்றின் இழு விசை (T)

(2) வழவழப்பான பரப்பின் எதிர்வினை (R)

(3) நிலை நிறுத்தப்பட்ட ஒரு பரப்பின் மேல் ஒரு பொருள் நகராது உருளும் போது ஏற்படும் எதிர் வினை (R)

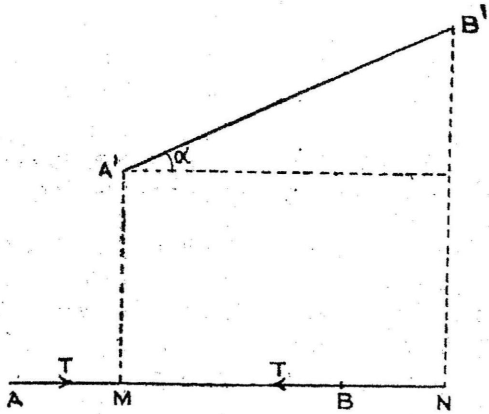
(4) இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று அழுத்தும் போது உருவாகும் சம நேரெதிர் வினைகள் (R)

ஒவ்வொன்ருக இவற்றிற்குரிய காரணங்களைப் பார்ப்போம்.

(1) கயிற்றின் இழுவிசை (T)

[படம் 13-3. (1)]-ல் AB ஒரு கயிறு. கயிற்றின் நீளம் மாறுவதில்லை; படத்தில் காட்டியபடி T, T என்ற இழு விசைகள்

முறையே A, B-ல் செயற்படுகின்றன. இக் கயிறு ஒரு கட்டிருக் கப் பொருளில் ஒரு பகுதி. அப் பொருள் மேல் விசைகள் செயற்பட்டு அப் பொருள் அசைவற்ற நிலையிலிருக்கும் போது ஒரு நுண்ணிய கற்பித இடப் பெயர்ச்சி ஏற்படுங்கால், AB என்ற நிலையிலுள்ள கயிறு $A'\,B'$ என்ற நிலைக்கு வருகிறதெனக்



படம் 13-3.(i)

கொள்வோம். A', B'–லிருந்து AB-ன் மேல் $A'M, B'N$ என்ற குத்துக் கோடுகள் வரைக. கயிற்றின் திருப்பம் α என்ற ஒரு சிறு கோணம். எனவே,

$$MN = A'B' \cos \alpha$$

$$= A'B' \text{ (}\alpha\text{-மிக நுண்மையான கோணம்)}$$

$$= AB \text{ (கயிறு நீளம் மாறுவதில்லை)}$$

எனவே, $AM = BN$ எனப் பெறுகிறோம்.

இழு விசை செய்யும் கற்பித வேலை

$$= T.\,AM + T\ (-BN)$$

$= 0$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, நாம் கற்பித வேலைச் சமன் பாட்டை அமைக்கும் போது இழு விசையின் கற்பித வேலையைப் புறக் கணிக்கலாம்.

(2) வழவழப்பான பரப்பின் எதிர்வினை (R)

பரப்பின் மேல் தொடுமிடம் P-ல் செயற்படும் எதிர்வினை, பரப்பிற்குச் செங்குத்தான கோட்டில் செயற்படுகிறது. தொடும் புள்ளி P சற்று நகர்ந்து P'-க்கு வருமானால், PP' ஏறக் குறைய R-க்குச் செங்குத்தாகவே இருக்குமாதலால், R செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

ஆனால் பரப்பு சொர சொரப்பாக விருப்பின், F என்ற உராய்வு விசை செய்யும் வேலை $F\,(-Pp')$ என வரும்.

(3) நிலை நிறுத்தப்பட்ட ஒரு பரப்பின்மேல் ஒரு பொருள் நகராது உருளும் போது ஏற்படும் எதிர்வினை (R)

ஒரு பொருள், மற்றொரு நிலைநிறுத்தப்பட்ட பொருளின் மேல் நகராது உருளும்போது, தொடும் புள்ளி ஒரு கண நேரம் அமைதி நிலையிலிருக்கிறது. எனவே அக் கணத்தில், செங் கோட்டு எதிர்வினையும், உராய்வு விசையும் நகரவில்லை யாத லால் அவை செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

(4) இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று அழுத்தும்போது உருவாகும் எதிர்வினைகள் ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிர்த் திசை களில் சமமாகவிருப்பதால், கற்பித நகர்ச்சிக்கு அவை செய்யும் மொத்த வேலை பூச்சியமாகிறது. எனவே, இரு பொருள் களையும் ஒரே அமைப்பாகக் கொண்டு கற்பித வேலைச் சமன் பாட்டினை எழுதினால், எதிர்வினைகள் அச் சமன்பாட்டில் இடம் பெறா. மூட்டுடைய கழிகள், இணைக்கப்பட்ட கம்பிகள் முதலியனவற்றில் மூட்டுகளில் செயற்படும் எதிர் வினைகளை நாம் விலக்கலாம்.

13–3.1. பயன்படும் இடங்கள்

ஒரு வழவழப்பான பரப்பின் மேல் தாங்கப்படுவதால் செயற்படும் எதிர்வினை காண்பதற்கும், ஒரு கயிறு இழுக்கப் படு வதால் செயற்படும் இழு விசை காண்பதற்கும், ஒரு கழியோ கம்பியோ அழுத்தப்படுவதால் ஏற்படும் அழுத்த விசை காண் பதற்கும் கற்பித வேலைச் சமன்பாடு பயன்படும். ஆனால், இந்த நிலைகளிளெல்லாம் வடிவ கணிதக் கட்டுப்பாடுகளுக்குட் பட்டே, கற்பித இடப்பெயர்ச்சிகள் கணக்கிலெடுக்கப்பட வேண்டும். பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் மேலே கூறிய பலவித கொள்கைகளையும் முடிவுகளையும் விளங்க

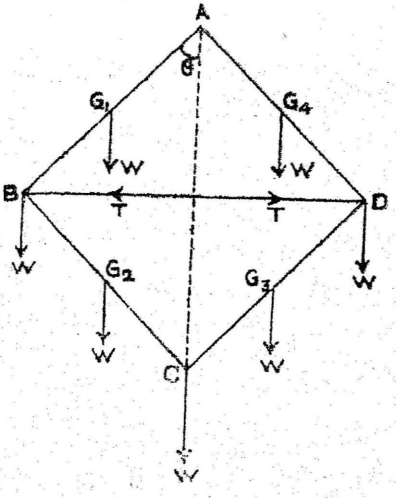
வைக்கும். ஆனுல், ஒரு கயிறு தனது நீளம் l-லிருந்து வடிவ கணிதக் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு $\triangle l$ நீளுமானுல், அப்போது செயற்படும் இழு விசை T காரணமாக $-T. \triangle l$ என்ற அளவு கற்பித வேலே செய்யப்படுகிறது.

அதே மாதிரி ஒரு கழி தனது நீளத்தில் Δl அழுத்தப்படுமானுல், அப்போது செயற்படும் அழுத்த விசை T காரணமாக $T \Delta l$ என்ற அளவு கற்பித வேலே செய்யப்படுகிறது.

13-4. எடுத்துக்காட்டு 1:

நான்கு சம எடை W, சம நீளம் $2\,l$ உள்ள கழிகளாலான ஒரு சதுர அமைப்பு ஒரு முனேயிலிருந்து கட்டித் தொங்க விடப்படுகிறது. மற்ற மூன்று முனேகளிலிருந்து W, W, W என்ற எடைகள் தொங்கவிடப்படுகின்றன. சதுர அமைப்பு மாருவண்ணம் ஒரு மெல்லிய (எடை மிகக் குறைந்த) கழி கிடைக்கோட்டிலிருக்கும் இரு முனேகளேச் சேர்த்து நிற்கிறது. அக்கழியில் செயற்படும் இழு விசை $4W$ என நிறுவுக.

(படம் 13-4.1.)-ல் காட்டியுள்ளபடி எடை, விசைகள் செயற்படுகின்றன. $B\,D$ என்பது B, D என்ற முனேகளே



படம் 13-4.1.

இணேத்து நிறுத்தும் மெல்லிய கழி. அதில் செயற்படும் இழு விசை T எனக் கொள்க.

$\angle BAC = \theta$ எனக் கொள்வோம். வடிவ கணித கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு θ கொள்ளப்படுகிறது. A–லிருந்து இவ்வமைப்பு தொங்கவிட்டிருக்கிறது.

$AB = BC = CD = DA = 2l$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே $AG_1 = l =$ இதைப் போன்ற மற்றவை.

A–என்ற முனையிலிருந்து

(1) G_1, G_4 –ன் குத்து தூரங்கள் $l \cos \theta$

(2) B, D–ன் குத்து தூரங்கள் $2 l \cos \theta$

(3) G_2, G_3-ன் குத்து தூரங்கள் $3 l \cos \theta$

(4) C–ன் குத்து தூரம் $4 l \cos \theta$

$$BD = 4 l \sin \theta$$

BD-ன் நீளம் நுண்ணிய அளவு மிகும்படி ஓர் இடப்பெயர்ச்சி எடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்போது செய்யப்படும் கற்பித வேலைகள் பட்டியல் பின்வருமாறு:

(1) G_1, G_4-ல் செயற்படும் W: வேலை $= Wd(l \cos \theta) + W d (l \cos \theta)$

(2) B, D ,, W: வேலை $W d = (2l \cos \theta) + W d (2l \cos \theta)$

(3) G_2, G_3 ,, W: வேலை $= W d (3l \cos \theta) + W d (3l \cos \theta)$

(4) C ,, ,, W: வேலை $= W d (4l \cos \theta)$

(5) கயிற்றில் ,, T: வேலை $= T \times d (4l \sin \theta)$

எனவே கற்பித வேலைச் சமன்பாடு,

$$2 W d (l \cos \theta) + 2 W d (2l \cos \theta) + 2 W d (3l \cos \theta) + W d (4l \cos \theta) + T d (4l \sin \theta) = 0.$$

$$\therefore -16 Wl \sin \theta . d \theta + 4 Tl \cos \theta \, d \theta = 0$$

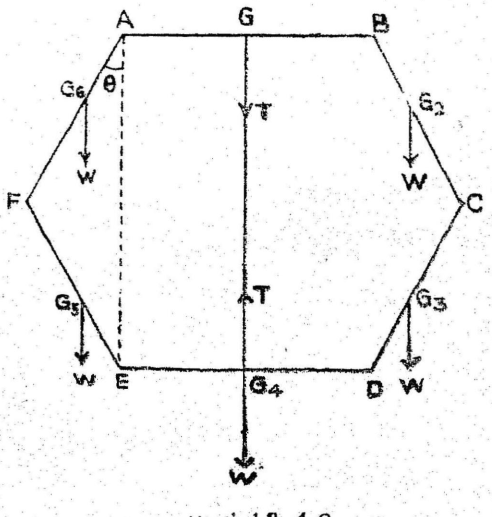
$$\therefore \quad T = 4 W \tan \theta.$$

வடிவ கணித கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு, சதுரமானது சதுர அமைப்பு மாரு வண்ணமிருப்பதால்,

$\theta = 45°$; எனவே, $\tan\theta = 1$.

$\therefore\ T = 4W$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஆறு சம எடை W, சம நீளம் $2l$ உள்ள கழிகள் ஒரு சீரான அறுகோண அமைப்பில் ஆக்கப் பட்டு ஒரு கழி தனது மையப் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப் படுகிறது. அறுகோண அமைப்பு மாரு வண்ணம் அக் கழியின் மையமும் அதற்கு எதிர்ப் பக்கமுள்ள கழியின் மையமும் ஒரு மெல்லிய கயிற்றினுல் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. அக் கயிற்றின் இழு விசை $3W$ என நிறுவுக. (படம் 13-4.2.) அவ் வமைப்பு தொங்குவதைக் காட்டுகிறது.



படம் 13-4.2.

செயற்படும் விசைகள் படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. G_1–ல் செயற்படும் W மட்டும் கற்பிதமாக நுண் இடப் பெயர்ச்சி பெருது; அவ்வாறே அங்குச் செயற்படும் எதிர் வினையும் இடப் பெயர்ச்சி பெருது, $G_1 G_4$ என்ற கயிற்றில் ஒரு நுண்ணிய நீட்சி ஏற்படின், வடிவ கணித கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு G_2, G_3, G_4, G_5, C_6-ல் செயற்படும் விசை சற்றுக் கீழே குத்துக் கோடு களில் இறங்கும்.

W-க்கள் கற்பிதமாக இறங்கும் தூரங்கள்:

$G_2\, G_6$-ல் உள்ள W: $d\,(l \cos \theta)$

$G_3,\, G_5$-ல் உள்ள W: $d\,(3l \cos \theta)$

G_4-ல் உள்ள W: $d\,(4\,l \cos \theta)$

$G_1,\, G_2$-ல் ஏற்படக்கூடிய கற்பித நீட்சி $= d\,(4\,l \cos \theta)$

∴ கற்பித வேலைச் சமன்பாடு:

$$W.d\,(l \cos \theta) + W.d\,(l \cos \theta) + W.d\,(3\,l \cos) +$$

$$+ W.d\,(3\,l \cos \theta) + W.d\,(4l \cos \theta) - T.d\,(4l \cos \theta) = 0$$

∴ $T = 3W$ என நிறுவப்படும்.

குறிப்பு (1): G_1 G_4 இணைக்கப்படாமல், C-ம், F-ம் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், கற்பித வேலைச் சமன்பாடு காண, FC-ன் வடிவ கணித முறைப்படியான நீளம்

$= 2l \sin \theta + 2l$ என்பது நமக்குத் தெரிய வேண்டும்.

$$FC = 3l\ (1+\sin \theta)$$

$$= 2l \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

இப்போது கற்பித வேலைச் சமன்பாடு,

$$-W.12l \sin \theta\, d\, \theta + T.d \left[\, 2l\left(\left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2\right) \right] = 0.$$

என வரும்.

அதாவது,

$$2\,T.l.\,2\, \left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right) \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \cos\ \frac{\theta}{2}\right)\tfrac{1}{2}d\theta$$

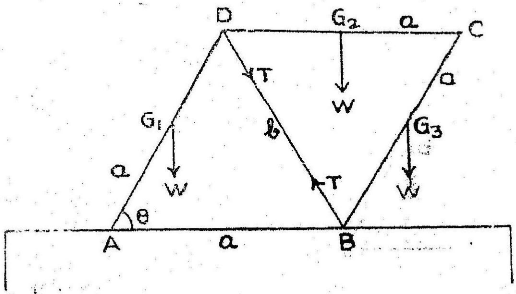
$$= 12\ Wl \sin \theta\, d\, \theta$$

$$T = \frac{12\ Wl \sin \theta}{2\left(\cos^2\ \frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)} = \quad 6\ W \tan \theta$$

இங்கு $\theta = 30°$

$$\therefore\ T = \frac{6\ W}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ W$$ என வரும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு சாய் சதுர அமைப்பில் a அளவுள்ள நான்கு கழிகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சாய் சதுரத்தின் சிறிய மூலை விட்டம் b. ஒவ்வொரு கழியின் எடை W. ஒரு பக்கம் ஒரு கிடைக்கோட்டில் உள்ளவாறு அவ்வமைப்பு ஒரு மேசைமேல் குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, அமைப்பு மாரு வண்ணம் சிறிய மூலை விட்டமுனைகளை b அளவுள்ள ஒரு மெல்லிய கழி இழுத்து நிறுத்துகிறது. கழியில் செயற்படும் அழுத்து விசை $\dfrac{2W(2a^2-b^2)}{a\sqrt{4a^2-b^2}}$ என நிறுவுக. (படம் 13–4.3. காண்க.)



படம் 13-4.3.

(படம் 13-4.3.)–ல் காட்டியபடி W, W, W என்பவை முறையே G_1, G_2, G_3 என்ற AD, DC, CB–ன் மையப் புள்ளிகளில் செயற்படுகின்றன. DB ஒரு மெல்லிய கழி; அதில் T என்ற அழுத்து விசை செயற்படுகிறது.

AB–ன் எடை W, AB–ன் மையத்தில் செயற்படும்; AB–ன் மேல், மேசையின் எதிர்வினையும் செயற்படும். ஆனால் AB–ன் மையம் இடம் பெயராதாகையால், AB-ன் எடையும், மேசையின் எதிர்வினையும் கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டில் இடம் பெரு.

$\angle BAD = \theta$ எனக் கொண்டால்,

G_1, G_2, G_3 என்ற புள்ளிகள் AB–லிருந்து முறையே $\frac{a}{2}\sin\theta$, $a\sin\theta$, $\frac{a}{2}\sin\theta$ உயரத்திலிருக்கும்.

சிறு கற்பிதப் பெயர்ச்சிக்குரிய, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு பின்வருமாறு:

$$W.d\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right) + W.d\,(a\sin\theta) + W.d\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)$$

$$- T.d\,b = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

ஆனல், $b^2 = a^2 + a^2 - 2\,a^2\cos\theta$

$$= 2\,a^2\,(1 - \cos\theta) \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$= 2\,a^2\;2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\quad b = 2a\sin\frac{\theta}{2} \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\therefore d\,b = 2a\,.\,\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\,\theta$$

எனவே, கற்பித வேலைச் சமன்பாடு (1) பின்வருமாறு பெறப்படும்.

$$W\,\frac{a}{2}\cos\theta\,d\,\theta + W\,a\cos\theta\,d\,\theta + W\,\frac{a}{2}\cos\theta\,d\,\theta$$

$$- T\,a\cos\frac{\theta}{2}\,d\,\theta = 0$$

$$\therefore\quad T = \frac{W.2a\;\cos\theta}{a\;\cos\;\theta/2}$$

வடிவ கணித கட்டுப்பாட்டின்படி,

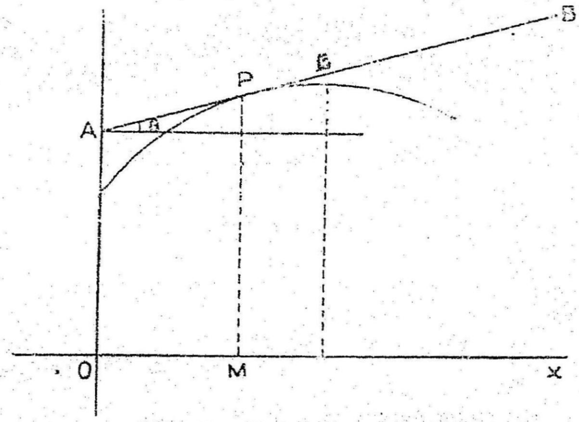
$$\cos\theta = \frac{2\,a^2 - b^2}{2\,a^2} \qquad \ldots \qquad (2)\text{–ன்படி}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4\,a^2}} \qquad \ldots \qquad (3)\text{–ன்படி}$$

$$\therefore\; T = \frac{2\,W\left(\dfrac{2\,a^2 - b^2}{2\,a^2}\right)}{\tfrac{1}{2}\,a\,\sqrt{4\,a - b^2}}$$

$$= \frac{2\,W\,(2\,a^2 - b^2)}{a\sqrt{4\,a^2 - b^2}}$$ என நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு சீரான தூலம், ஒரு வழவழப்பான வளை வரை மேல், குத்துத் தளத்தில் தொட்டுக் கொண்டு நிற்கிறது; அத் தூலத்தின் ஒரு முனை ஒரு வழவழப்பான சுவரின் மேல் தாங்கி நிற்கிறது. எந்த நிலையிலும் அத் தூலம் அசைவற்றிருக்க முடியுமானல், அவ் வளைவரையின் சமன்பாடு காண்க.



படம் 13-4.4.

(படம் 13-4.4.)-ல் சுவரினை y அச்சாகவும், சுவரில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி Oஐ ஆய ஆதியாகவும் கொண்டு OX என்ற x அச்சினையும் கொள்க. AB என்பது தூலம், நீளம் $2a$; அதன் பு. மையம் G. தூலம் வளை வரையை P-ல் தொட்டுக் கொண்டு சுவரில் A என்ற புள்ளியில் உதைந்து நிற்கிறது. OX-லிருந்து G-ன் உயரம் y எனக் கொண்டால்,

கற்பித வேலைச் சமன்பாடு, $W.\Delta y = 0$

$\therefore$ $y =$ மாறிலி $= h$ எனக் கொள்ளலாம். தொடுவரையான தூலம் x அச்சுக்கு θ அளவு சாய்ந்திருக்குமானல்,

G-ன் ஆயத் தொலை $(a \cos \theta, h)$

$\therefore$ AG-ன் சமன்பாடு,

$$(y - h) = \tan \theta \, (x - a \cos \theta)$$
$$= x \tan \theta - a \sin \theta \quad \ldots \quad (1)$$

இந்தச் சமன்பாடு (1)ஐத் தொடு வரையாகக் கொண்ட, வளைவரையின் சமன்பாடு காண வேண்டும்; அதாவது இந்நேர் கோட்டின் தொடு வளையைக் (Envelope) காண வேண்டும்.

'θ'ஐ யொட்டி, வகை நுண்கெழு கண்டால்,

$$0 = x\sec^2\theta - a\cos\theta \qquad \ldots \qquad (2)$$

என வரும்.

(1)–க்கும், (2)-க்கும் இடையே 'θ' ஐ நீக்கினால் பெறப்படும் தொடர்பே, தொடுவளையின் சமன்பாடாகும்.

(2)–லிருந்து $x = a\cos^3\theta$

$$\therefore \quad y-h = a\cos^3\theta\tan\theta - a\sin\theta$$

$$= a\sin\theta(\cos^2\theta - 1)$$

$$= -a\sin^3\theta$$

$$\therefore \quad \left(\frac{y-h}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$ என்ற நீக்குறு கிடைக்கும்.

எனவே, தூலம் தொட்டு நிற்கும் வளை வரையின் சமன்பாடு $x^{\frac{2}{3}} + (y-h)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

என்ற நான்கு பிறை முனை பெற்ற அகவுருள் வளை. (Four—cusped hypocycloid).

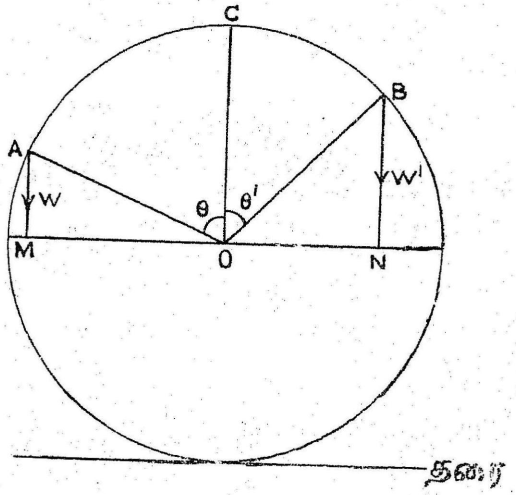
எடுத்துக்காட்டு 5: இரு எடைகள் W, W' ஒரு வழ வழப்பான உருளை மேல் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு அசைவற்ற நிலையிலிருக்கின்றன. உருள் வரை வெட்டு முக வட்டத்தின் மையத்தோடு அவ் வெடைகளை இணைக்கும் ஆரம் முறையே θ, θ' என்ற அளவில் மைய வழியாகவுள்ள குத்துக் கோட்டிற்குச் சாய்ந்திருக்கின்றன. உருளை கிடைத்தளத்தில் தனது அச்சு கிடைக் கோட்டில் உள்ளவாறு வைக்கப்பட்டிருக் கிறது. $W\sin\theta = W'\sin\theta'$ என நிறுவுக. (ப.க.)

(படம் 13-4.5.)–ல் உருளையின் வெட்டு முகம் காட்டப்பட் டிருக்கிறது. AB என்ற கயிறு முனைகளில் W, W' என்ற எடைகள் கட்டப்புட்டு, கயிறும் எடைகளும் உருளை மேல்

வைக்கப்பட்டு, அசைவற்ற நிலையில் இவ் வமைப்பு இருக்கிறது. (கயிறு தடிப்பான கோட்டினுல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது, ACB.)

$\angle COA = \theta$

$\angle COB = \theta'$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.



படம் 13-4.5.

A, B-லிருந்து வெட்டு முகத்தின் கிடைக்கோட்டு விட்டத்தின் மேல் AM, BN என்ற குத்துக் கோடுகள் வரையப் பட்டுள்ளன. உருளையின் ஆரம் a எனக் கொண்டால்,

$$AM = a\cos\theta$$
$$BN = a\cos\theta'$$

AB என்ற நீளம் மாறிலி.

$AB = l$ எனக் கொண்டால்,

$l = a\theta + a\theta'$ (θ, θ' — ஆரையன் அளவில்

$\therefore\ a\,\delta\theta + a\,\delta\theta' = 0$ என வரும்

$$\delta\theta = -\,\delta\theta' \qquad \ldots \qquad (1)$$

A, B-ல் செயற்படும் எதிர்விணைகள் கற்பித வேலைச் சமன்பாட்டில் இடம் பெரு.

$\therefore$ கற்பித வேலைச் சமன்பாடு,

$$W.d\,(a\cos\theta) + W'.d\,(a\cos\theta') = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1)-ம், (2)-ம் நமக்குத் தேவைப்படும் தொடர்பைத்தரும்.

(2)-லிருந்து $- Wa \sin\theta\ \delta\theta - W' a \sin\theta'\ \delta\theta' = 0$ (3)

ஆனால் (1)-ல் கண்ட $\delta\theta = -\delta\theta$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தினால்

$$W a \sin\theta = W' a \sin\theta'$$

அதாவது $W \sin\theta = W' \sin\theta'$ என்று நாம் நிறுவ வேண்டிய தொடர்பு பெறப்படும்.

பயிற்சி : 13

1. நான்கு சமநீளம் சம எடை (W) பெற்ற கழிகளாலாய ஒரு சாய் சதுர அமைப்பு, ஒருமுனை A-லிருந்து தொங்கவிடப் படுகிறது. அதன் உருக் குலையாவண்ணம் மேலிரண்டு கழி களின் மையங்களை ஒரு மெல்லிய கழி இணைத்து நிறுத்தியிருக் கிறது. இம் மெல்லிய கழியில் செயற்படும் இழுவிசை $4W \tan\alpha$ என நிறுவுக. (தொங்குமுனையில் சாய் சதுரக்கோணம் 2α எனக் கொள்க)

இக்கழி மேலிரண்டு கழிகளின் மையங்களை இணைக்காமல்,

(i) மேலிரண்டு கழி முனைகளை இணைத்து நிற்குமானால் இழு விசை என்ன ?

(ii) கீழிரண்டு கழிகளின் மையங்களை இணைத்து நிற்கு மானால், இழுவிசை என்ன ?

இந்த மூன்று நிலைகளிலும், பின் கூறப்பட்ட நிகழ்ச்சியை கணக்கில் எடுத்துக்கொண்டு கழியின் இழுவிசைகள் ஒவ் வொன்றிலும் காண்க.

B, C, D என்ற முனைகளில் W, W, W என்ற எடைகள் தொங்க விடப்பட்டிருக்கின்றன என்று கொண்டால், ஒவ்வொரு நிலை யிலும் கழியின் இழுவிசை காண்க.

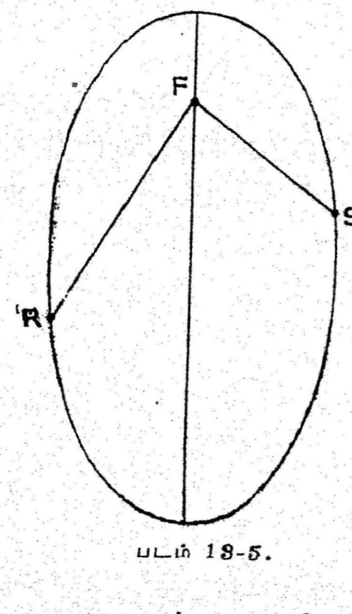
2. நான்கு சம எடை (W) சமநீளம் (a) உள்ள கழிகள் இணைக்கப்பட்டு ஒரு முனையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டிருக் கிறது. இந்த முனை எதிர்முனையோடு மீள் இயல்புள்ள ஒரு கயிற்றினால் கட்டப்பட்டு, ஒரு சதுர அமைப்பில் இருக்கிறது. அக் கயிற்றின் மீள்சக்தி மாறிலி (Modulus of Elasticity) W ஆனால், கயிற்றின் இயல்பான நீளம் $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ என நிறுவுக.

3. நான்கு கழிகள் ஓர் இணைகர அமைப்பில் இணைக்கப்பட்டு மூலைவிட்டங்களாக அமையும் வகையில் எதிர்முனைகள் கயிறுகளால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவ் வமைப்பு ஒரு வழப்பான மேசைமேல் குத்துதளத்தில் நிறுத்தி வைக்கப் பட்டிருக்கிறது. கயிறுகளின் இழுவிசைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்கு நேர் தகவுப் பொருத்த முடையன வென நிறுவுக.

4. ஒரு சமபக்க அறுகோண அமைப்பில் ஆறு சமஎடையுள்ள கழிகள் இணைக்கபட்டு, இரண்டு எதிர்கோண முனைகள் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு, அக் கயிறு கிடைக் கோட்டில் உள்ளது. இவ் வமைப்பு ஒரு மேசை மேல் குத்து தளத்தில் நிற்கிறது. மேல் கழியின் மையத்தில் w_1, என்ற எடைகட்டித் தொங்க விடப்பட்டிருக்கிறது. ஒரு கழியின் எடை w எனில், கயிற்றில் செயற்படும் இழுவிசை $\frac{w_1+3w}{\sqrt{3}}$ என நிறுவுக

5. $2b$ நீளமுள்ள இருசீரான கழிகள் AB, AC என்பவை A-ல் இணைக்கப்பட்டு, குத்து தளத்தில் நிற்கும் a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மேல் வைக்கப் பட்டிருக்கிறது. அவ்விரு கழிகளுக்கு மிடைப்பட்ட கோணம் 2θ எனக் கொண்டால், $a\cos\theta = b\sin^3\theta$ என நிறுவுக.

6. R, S என்ற இரு வழவழப்பான வளையங்கள் (சம எடையுள்ளவை) குத்து தளத்திலுள்ள ஒரு நீள்வட்ட அமைப்பிலுள்ள கம்பியில் நகர முடியும். நீள்வட்டம் குத்து தளத்தில் வைக்கப் பட்டு, ஒரு (Focus) F-ல் பொருத்தப்பட்ட ஒரு சிறு முனைக் குச்சி மேல் செல்லும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளில் அவ் வளையங்கள் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அவ் வளையங்கள் எந்த நிலையிலும் அசைவற்றிருக்குமென நிறுவுக. (படம் 13-5.)



படம் 13-5.

7. ஒரு தூலத்தின் ஒருமுனை ஒரு வழவழப்பான குத்துச் சுவரின் மேல் உதைந்து கொண்டு மற்றொரு முனை சுவருக்கு

செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வழுவழுப்பான வளைவரை மேல் தாங்கப்பட்டு எந்த நிலையில் வைக்கப்பட்டாலும் அமைதியான நிலையில் நிற்கிறது. அவ் வளைவரை ஒரு நீள் வட்டமெனநிறுவுக

8. ஒரு கழியின் ஒருமுனை ஒரு வழுவழுப்பான குத்துச் சுவர் AB-ன் மேல் உதைந்து கொண்டு, மற்றொரு முனை α அளவு சாய்ந்துள்ள AC என்ற சாய்தளத்தின் மேல் தாங்கப்பட்டு அசைவற்ற நிலையில் இருப்பின், அக் கழி சுவரோடு சாய்ந்திருக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(2\tan\alpha)$ என நிறுவுக.

9. ஒரு வட்டத்தளம் பெற்ற கூம்பு (உச்சி அரைக் கோணம் α) உச்சிமேலாகக் கிடைத்தளத்தில் நிற்கிறது. ஒரு சங்கிலி வளையம் அதன்மேல் ஒருவட்ட அமைப்பு மாலைபோல் போடப்பட்டிருக்கிறது. சங்கிலியின் இழுவிசை $\frac{W\cot\alpha}{2\pi}$ என நிறுவுக. (சங்கிலியின் எடை W எனக் கொள்க.)

10–A என்ற எழுத்து வடிவிலுள்ள ஓர் ஏணியின் இருகால்களும் குத்துக் கோட்டுக்கு α அளவு சாய்ந்திருக்கின்றன. ஏணி கிடைத்தளத்தில் நிற்கிறது. உராய்வு எங்குமில்லை. இரு கால்களின் மையங்கள் ஒரு கயிற்றினால் இணைக்கப் பட்டிருக்கின்றன. ஏணியின் ஒருபடி கீழிருந்து ஏணி உயரத்தில் $\frac{1}{n}$ அளவு தூரத்திலிருக்கிறது. அந்தப்படிமேல் W என்ற ஓர் எடை வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்போது கயிற்றின் இழுவிசை $\frac{1}{n} W \tan\alpha$ என நிறுவுக.

விடைகள்

பயிற்சி 4 a.

I. (1) $R = 10$ கி:கி; $\tan\theta = \frac{4}{3}$

(2) $R = 8\sqrt{3}$ கி.கி; $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $R = \sqrt{9+4\sqrt{2}}\ a$ கி. கிராம்; $\tan\theta = \frac{1}{2}$.

பயிற்சி 4 b.

1. $9\frac{3}{13}$ கி. கி; $3\frac{11}{13}$ கி.கி.

பயிற்சி 5

1. 6 கி. கிராம்; 4 கி. கிராம்.
2. 62.5 கி. கிராம்; 57.5 கி. கிராம்.
3. *A* என்ற முனையிலிருந்து 75 செ.மீ• தூரத்தில்

பபற்சி 6 (a)

1. 6 கி. கிராம் எடையிலிருந்து $1\frac{5}{6}$ மீ. தூரத்தில்.

3. இவ்விரு விசைகளும் செயற்படும் கோடுகள் *O* என்ற இயத்தில் சந்திக்குமானுல், அவ்விரு கோடுகளுக்கும் இடைப் புட்ட கோணத்தைச் சம கூறுக்கும் கோடுதான் இயங்கு வழி.

11. $P\sqrt{7}$; BC–ன் நீட்டலில் $CX = \frac{a}{3}$ என்ற வகையில் X என்ற புள்ளியில்; BC–ன் நீட்டலுக்குக் கூட்டளவு பக்கம் சாய்வு $= \tan^{-1}(3\sqrt{3})$.

12. 9 கி. கிராம்; AD–ன் மேல் $AX : XD = 1 :$ என்ற வகையில் X என்ற புள்ளியில் AB–க்கு இணையாக, $A \to B$ என்ற திசை.

15. $6P$; $\tan\theta = \sqrt{3}$

பயிற்சி 6 (b)

1. 200 கிராம்

2. பின் சக்கரங்கள் W, W; முன் சக்கரம் $\frac{1}{2}W$

பயிற்சி 8 (a)

1. $\sqrt{93+36\sqrt{2}}$ கிராம்; AD, AD என்பவை, x, y — அச்சுகளானுல் கோட்டின் சமன்பாடு

$$x(5+8\sqrt{2}) = y(4\sqrt{2}-1) + (18+12\sqrt{2}).$$

2. $R = 2\sqrt{3}$; $G = -\frac{3\sqrt{3}}{2}a$; a அறுகோணப்பக்கம்.

5. $R = P\sqrt{3}$; CA–ன் நீட்டலில் $AD = a$ என்ற வகையிலமைந்த D–ல், CA-க்குச் செங்குத்தாக.

7. CB – க்கு இணையாக, DA – ஐ, D – க்கு மேல் $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ தூரத்தில் வெட்டுகிறது; அளவு $3P$.

8. முதல் ஆய ஆதியிலிருந்து x - அச்சின் மேல், வலப் பக்கத்தில் $1\frac{11}{16}$ மீட்டர் தூரத்தில்

11. a, b, c என்பவை முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்; S-முக்கோணத்தின் பரப்பு.

$$\frac{G_1 a}{2S}, \quad \frac{G_2 b}{2S}, \quad \frac{G_3 c}{2S}.$$

15. $\frac{1}{6}\sqrt{561}$; $21x + 11y - 14 = 0$.

பயிற்சி 10

2. A-லிருந்து BC-க்குத் தூரம் p_1 எனவும் B-லிருந்து CA-க்குத் தூரம் p_2 எனவும் கொண்டால், BC-லிருந்து $\frac{3}{13}p$ தூரமும், CA-லிருந்து $\frac{4}{13}p_2$ தூரமும் உள்ள புள்ளியிலிருக்கும்.

4. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

5. A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்படும் மைய வெட்டியின் நீளம் l ஆனால், அவ்வெட்டியின்மேல் BC-லிருந்து $\frac{2l}{9}$ தூரமுள்ள புள்ளியில் பு. மையமிருக்கும்.

7. G-லிருந்து $\frac{a}{6\sqrt{3}}$ தூரத்தில்.

23. அடி மட்டத்திலிருந்து ஏறக்குறைய 19 செ. மீ. உயரத்தில்.

பயிற்சி 11

2. அளவு $\frac{\pi r^3}{3} P$; P என்பது அடர்த்தி.

பயிற்சி 12 (a)

1. 30 கி.கிராம்.

பயிற்சி 12 (b)

மீச்சிறு இழுவிசை	மீப்பெரு இழுவிசை
1. 62·5 மெ.டன்	$12.5\sqrt{29}$ மெ.டன்.
2. 75 மெ. டன்	85 மெ.டன்
3. 250 மெ.டன்	$50\sqrt{29}$ மெ.டன்.

புத்தகப் பட்டியல்

(BIBLIOGRAPHY)

S.L. Loney ... Elements of Statics

S.L. Loney ... Statics

A.S. Ramsey ... Statics

Humphrey: ... Intermediate Mechanics

C.F. Weatherburn ... Elementary Vector Analysis

B. Spain ... Vector Analysis

M. L. Khanna ... Statics

T. Govinda Rajan and others ... Statics

T.K. Manickavasagom Pillai ... Statics

T.R.R. Sastri ... Statics

கலைச்சொற்கள்

(ஆங்கிலம் - தமிழ்)

A

Absolute	—	தனி
,, motion	—	தனி இயக்கம்
,, value	—	தனி மதிப்பு
Acceleration	—	முடுக்கம்
Angular acceleration	—	கோண முடுக்கம்
Acceleration due to gravity	—	புவியீர்ப்பு முடுக்கம்
Accurate	—	மிகச் சரியான
Action	—	விசை, வினை
Reaction	—	எதிர்விசை, எதிர்வினை
Add	—	கூட்டு
Addition	—	கூட்டல்
,, Vector	—	வெக்டர் கூட்டல்
Adjacent	—	அடுத்துள்ள
Admissible solution	—	ஏற்கத்தக்க தீர்வு
Algebra	—	இயற்கணிதம்
Algebraic sum	—	இயற் கூட்டுத்தொகை
Alternate	—	ஒன்றுவிட்ட
,, angle	—	ஒன்றுவிட்ட கோணம்
Altitude	—	குத்துக்கோடு, குத்துயரம்
Amplitude	—	வீச்சம்
Analysis	—	பகுப்பாய்வு, பகு இயல்
Angle	—	கோணம்
,, vertex of an	—	கோண முனை, கோண உச்சி
,, at the centre	—	மையக் கோணம்

Angle of friction — உராய்வுக் கோணம்
,, of inclination — சாய்வுக் கோணம்
Anti clockwise — இடஞ்சுழியாக
Apex — உச்சி
Approximate — தோராயமான
Attraction — கவர்ச்சி, ஈர்ப்பு
Average — சராசரி
Axis of revolution — சுற்றலச்சு
,, rotation — சுழலச்சு
,, symmetry — சமச் சீரச்சு

B

Beam — வளை, தூலம் (உத்திரம்)
Bisect — இருசமக் கூறிடு
Bisector — இருசம வெட்டி
,, perpendicular — செங்குத்து இருசம வெட்டி
Body — பொருள்
Breadth — அகலம்

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculus — நுண் கணிதம்
,, differential — வகை நுண்கணிதம்
,, integral — தொகை நுண்கணிதம்
Capacity — கொள்ளளவு
Case — வகை
,, general — பொது வகை
,, particular — குறிப்பிட்ட வகை
,, special — சிறப்பு வகை
Catenary — சங்கிலியம், கயிற்றுவளை
,, common — பொதுச் சங்கிலியம்
,, Parabolic — பரவளைவுச் சங்கிலியம்
,, uniform — ஒருசீர்ச் சங்கிலியம்
Central axis — மையவச்சு
Centre — மையம்
,, Circum — சுற்றுவட்ட மையம்

Centre In	—	உள்வட்ட மையம்
,, Instantaneous	—	கண மையம்
,, Ortho	—	செங்கோட்டு மையம்
,, of curvature	—	வளைவு மையம்
,, of gravity	—	புவியீர்ப்பு மையம் (பு. மையம்)
,, of mass	—	பொருண்மை மையம்
Centroid (triangle)	—	மையக்கோட்டுச் சந்தி, நடுக் கோட்டு மையம்
Centroid (பொது)	—	திணிவு மையம்
Chord	—	நாண்
,, of contact	—	தொடுநாண்
Circle	—	வட்டம்
,, segment of a	—	வட்டத்துண்டு
,, semi	—	அரை வட்டம்
,, of curvature	—	வளைவு வட்டம்
Coefficient	—	கெழு
,, of friction	—	உராய்வுக் கெழு
Coincide	—	பொருந்து, ஒன்றுபடு
Compare	—	ஒப்பிடு
Comparison	—	ஒப்பீடு
Condition	—	நிபந்தனை, கட்டுப்பாடு
Conditions	—	நிபந்தனைகள், கட்டுப்பாடுகள்
,, necessary and sufficient	—	தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடுகள்
,, of equilibrium	—	அசைவற்ற நிலைக்குரிய நிபந்தனைகள்/கட்டுப்பாடுகள்
,, of stability	—	உறுதிநிலை (க்குரிய) நிபந்தனைகள்/கட்டுப்பாடுகள்
Cone	—	கூம்பு
,, Frustum of a	—	கூம்பின் அடிவெட்டு
,, Generator of a	—	கூம்பின் ஆக்கி, பிறப்பாக்கி
,, Hollow	—	உள்ளீடில் கூம்பு, பொள்ளற் கூம்பு, குழிவான கூம்பு
Right circular	—	நேர்வட்டக் கூம்பு
,, Solid	—	திண்மக் கூம்பு, கூம்புத் திண்மம்
,, Surface of a	—	கூம்பின் மேற்பரப்பு
Consecutive	—	அடுத்தடுத்த

Constant — மாறிலி
,, of gravitation — புவியீர்ப்பு மாறிலி
Converse — மறுதலை
Conversely — மறுதலையாக
Co-ordinates — ஆயத்தொலைகள்
,, polar — போலார் ஆயத் தொலைகள்
Coplanar — ஒரு தளமான, ஒரு தளத்தமைந்த
,, forces — ஒருதள விசைகள், ஒரு தளத்தமை விசைகள்
Corollary — கிளைத்தேற்றம்
Couple — சுழலிணை, இணைச்சுழலி, இரட்டை
,, Moment of — சுழலிணைத் திருப்புத்திறன்

D

Define — வரையறு
Definite — வரையறுத்த
,, Integral — வரையறுத்த தொகையீடு
Definition — வரையறை
Diagonal — மூலைவிட்டம்
Diameter — விட்டம்
Difference — வேறுபாடு
Direction — திசை
Displacement — இடப்பெயர்ச்சி
Distance — தூரம்
,, Shortest — மீச்சிறு தூரம்
,, Perpendicular — செங்குத்து தூரம்

E

Earth — பூமி, புவி
,, 's attraction — புவியீர்ப்பு
Edge — விளிம்பு, வரம்பு
Elastic — மீள் இயல்புடைய, மீள் சக்தியுடைய
,, limit — மீள்சக்தியெல்லை

Elastic string	மீள் சக்திக் கயிறு, மீள் இயல்புள்ள கயிறு
Ellipse	நீள்வட்டம்
Ends	முனைகள்
Equal	சமன், சமம்
Equation	சமன்பாடு
Equilateral	சமபக்க
,, triangle	சமபக்க முக்கோணம்
Equilibrant	சமநிலையாக்கி, சமனி, எதிரீட்டு விசை, எதிர்ச் சமனி
Equilibrium	அசைவற்ற நிலை
,, Conditions of	அசைவற்ற நிலைக்குரிய கட்டுப்பாடுகள்
,, Neutral	நடுநிலைச் சமநிலை
,, Stable	உறுதிச் சமநிலை
,, Unstable	உறுதியில்லாச் சமநிலை, உறுதியற்ற சமநிலை

F

Face	முகம்
,, of a solid	ஒரு திண்மத்தின் முகம்
Figure	உருவம்
,, geometrical	வடிவகணித உருவம்
,, regular	ஒழுங்கு உருவம், சீரான உருவம்
,, similar	ஒத்த உருவம்
Force	விசை
,, Line of	விசைக் கோடு
,, Resultant	(கூட்டு) விளைவு விசை
,, of Friction	உராய்வு விசை
Forces, Coplanar	ஒருதள விசைகள், ஒரு தளத்தமைந்த விசைகள்
,, Coplanar, parallel	ஒருதள இணைவிசைகள், ஒரு தளத்தமைந்த இணைவிசைகள்
,, Parallel	இணைவிசைகள்
,, Parallelogram, Law of	இணைகர விதி (விசைகளின்)

Forces, Polygon, Law of — பலகோண விதி (விசைகளின்)
,, Resolution of — விசைப் பகுப்பு, விசைப் பிரிப்பு
,, System of — விசைத் தொகுதி
,, Triangle of — விசை முக்கோணம்
,, ,, Law — முக்கோண விதி (விசைகளின்)

Free Vector — தன்னிச்சையான வெக்டர்
Friction — உராய்வு
,, Angle of — உராய்வுக் கோணம்
,, Coefficint of — உராய்வுக் கெழு
,, Cone of — உராய்வுக் கூம்பு
,, Dynamical — இயக்க உராய்வு
,, Laws of — உராய்வு விதிகள்
,, Limiting — உராய்வெல்லை
,, Rolling — உருளுராய்வு
,, Sliding — வழுக்குராய்வு
,, Statical — நிலையியல் உராய்வு

G

Generalise — பொது விதி காண், பொதுமைப்படுத்து
Generating — பிறப்பிக்கும்
Generator — பிறப்பாக்கி
Gradient — சாய்வு விகிதம், சரிவு
Gram — கிராம்
,, Kilo — கிலோகிராம்
Gravitation — ஈர்ப்பு
,, Force of — ஈர்ப்பு விசை
Gravity — புவியீர்ப்பு
,, acceleration due to — புவியீர்ப்பு முடுக்கம்
,, Centre of — புவியீர்ப்பு மையம்

H

Harmonic series — இசைத்தொடர் வரிசை
Hemisphere — அரைக் கோளம்

Hemisphere Solid — அரைக்கோளத் திண்மம்
,, Hollow — அரைக்கோளக் குழிவு/ பொள்ளல்
Hexagon — அறுகோணம்
,, Regular — ஒழுங்கான அறுகோணம், சீரான அறுகோணம்
Hinge — பிணைப்பு, பிணையல்
Homogeneous — ஒருபடித்தான, சமபடித்தான
Hoop — வளையம்
Horizontal — கிடை
,, line — கிடைக்கோடு
,, plane — கிடைத்தளம்
Hypotenuse — செம்பக்கம்

I

In-centre — உள் மையம்
In-circle — உள் வட்டம்
Inclined — சாய்ந்த
,, plane — சாய் தளம்
Inconsistent — பொருந்தாத, முரணான
In elastic — மீள் இயல்பற்ற, மீள் சக்தி யற்ற
Intercept — வெட்டுத்துண்டு
Internal — உள்ளான
,, forces — உள் விசைகள்
Intersect — வெட்டு
Intersection — வெட்டுதல்
,, Point of — வெட்டும் புள்ளி
Internal — இடைவெளி
Invariable — மாற்றமில்லாத, மாறாத
Inverse — நேர்மாறான
,, proportion — நேர்மாறு விகிதம்
Irregular — ஒழுங்கற்ற
Isosceles triangle — இருசமபக்க முக்கோணம்
,, trapezium — இருசமபக்க சரிவகம்

J

Joint — மூட்டு, இணைந்த

K

Kinetic friction — இயக்கப் பண்புராய்வு, இயக்க உராய்வு

L

Lamina — தட்டு, தகடு
Lami's Theorem — இலாமித் தேற்றம்
Latus Rectum — செவ்வகலம்
Law — விதி
Laws of Friction — உராய்வு விதிகள்
,, Newton — நியூட்டன் விதிகள்
Left hand screw — இடக்கை திருகி
Left handed system — இடக்கைத் தொகுதி
Like — ஒத்த
Like parallel forces — ஒருபோகு இணைவிசைகள்
Limit — எல்லை
Limiting equilibrium — அசைவற்ற நிலையெல்லை
,, Friction — எல்லையுராய்வு, உராய் வெல்லை
Line — கோடு
,, Curved — வளைகோடு
,, Straight — நேர்கோடு
,, Vertical — நிலைக்குத்துக்கோடு, செங்குத்துக் கோடு
Line Vector — கோட்டமை வெக்டர்
Linear acceleration — நேர்கோட்டு முடுக்கம்
Link — இணை, இணைப்பு
Localised Vector — இடங்குறித்த வெக்டர்
Loop — வளையம்

M

Machine	—	பொறி, இயந்திரம்
,, Simple	—	எளிய பொறி
Magnitude	—	அளவு
,, and direction	—	அளவும், திசையும்
Mark	—	குறி, புள்ளி
Mass	—	திணிவு, நிறை, பொருண்மை
,, Centre of	—	திணிவு மையம், பொருண்மை மையம்
Maximum	—	மீப்பெரு
,, value	—	மீப்பெரு மதிப்பு
Measure	—	அளவு, அளவை
,, Radian	—	ஆரையன் அளவு (கோண அளவு)
Mechanics	—	நிலையியக்கவியல், இயந்திர வியல்
,, of a particle	—	துகள் நிலையியக்கவியல்
Median	—	மையக்கோடு
Method	—	வழி, செய்முறை
,, Analytical	—	பகுப்பு வழி, இயல்வடிவ கணித முறை
Metre	—	மீட்டர்
,, Kilo	—	கிலோ மீட்டர்
Metric system	—	மெட்ரிக் முறை
Mid-point	—	மையப்புள்ளி, நடுப்புள்ளி
Minimum	—	மீச்சிறு
,, value	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Modulus	—	மட்டு, மட்டு மதிப்பு, எண் அளவு
,, of a Vector	—	வெக்டர் எண் அளவு/ மட்டு மதிப்பு
Moment	—	திருப்புத்திறன், சுழல் திறன்
,, of a couple	—	சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்
,, of a force	—	விசையின் திருப்புத்திறன்
,, of a Vector	—	வெக்டரின் திருப்புத்திறன்
Momentum	—	உந்தம்
Motion	—	இயக்கம்
,, Relative	—	சார்பியக்கம்

Motion Uniform	—	சீரியக்கம்
,, of rotation	—	சுழற்சி யியக்கம்
,, of translation	—	பெயர்ச்சி யியக்கம்
,, under gravity	—	புவியீர்ப் பியக்கம்
Movement	—	அசைவு

N

Necessary and sufficient conditions	—	தேவையான, போதுமான அல்லது வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Negative moment	—	எதிர்த் திருப்புத்திறன்
Neutral	—	நடுநிலையான
Neutral equilibrium	—	நடு சமநிலை
Non-coplanar	—	ஒரு தளத்தமையாத
Non-rigid	—	விறைப்பில்லாத
Normal	—	செங்குத்துக் கோடு
,, reaction	—	நேர்குத்து எதிர்விசை
,, resolution	—	செங்குத்துப் பிரிப்பு

O

Object	—	பொருள்
Oblique	—	சாய்வான, சரிவான
,, axis	—	சரிவச்சு
Opposite	—	எதிரான
,, forces	—	எதிர் விசைகள்
,, side	—	எதிர்ப்பக்கம்
,, sign	—	எதிர்க்குறி
Orbit	—	ஒழுக்கு பாதை
Origin	—	ஆதி, ஆயஆதி
Ortho centre	—	செங்குத்து மையம்

P

Pair	—	ஜோடி, இரட்டை
Parabola	—	பரவளைவு
Parabolic catenary	—	பரவளைச் சங்கிலியம்

Parallel forces	—	இணை விசைகள்
Parallelogram	—	இணைகரம்
Parallelogram of forces	—	விசைகளின் இணைகரம்
Parallelopiped	—	இணைகரத் திண்மம்
,, of forces	—	விசை இணைகரத் திண்மம்
Parameter	—	சாராமாறி
Parametric equations	—	துணையலகுச் சமன்பாடுகள்
Part	—	பகுதி
Particle	—	துகள்
Peg	—	முளை, முளைக்குச்சி
Pentagon	—	ஐங்கோணம்
Perfectly elastic	—	நிறை மீள் இயல்புடைய
,, smooth	—	முற்றும் வழவழப்பான
Perpendicular	—	செங்குத்தான, செங்குத்து
,, plane	—	செங்குத்துத் தளம்
Plane	—	தளம்
,, Horizontal	—	கிடைத்தளம்
,, Vertical	—	நிலைக்குத்துத் தளம்
,, of motion	—	இயக்கத் தளம்
Point	—	புள்ளி
,, Fixed	—	நிலைத்த புள்ளி
Polar coordinates	—	போலார் ஆயத்தொலைகள்
,, equation	—	போலார் சமன்பாடு
Polygon	—	பலகோணம்
,, of forces	—	விசைப் பலகோணம்
Position Vector	—	வெக்டர் நிலை
Positive	—	நேர், மிகை, கூட்டு
,, moment	—	நேர்த் திருப்புத்திறன்
Power	—	அடுக்கு, படி, திறன்
Pressure	—	அழுத்தம்
Principal	—	முதல்
Principle	—	தத்துவம்
Prism	—	பட்டகம்
Produce	—	நீட்டு
Proof	—	நிறுவல், தெரிப்பு
Pull	—	இழு
Push	—	தள்ளு

Q

Quadrangle	— நாற்கோணம்
Quadrant	— கால்வட்டம், காற் பகுதி
Quadrilateral	— நாற்கரம்
,, cyclic	— வட்ட நாற்கரம்
Quantity	— கணியம்

R

Radian	— ஆரையன்
,, measure	— ஆரைய னளவை
Radius	— ஆரம், ஆரை
,, Circum	— சுற்றூரம், சுற்றூரை
,, In	— உள்ளாரம், உள்ளாரை
,, of curvature	— வளைவாரம், வளைவாரை
,, Vector	— ஆர வெக்டர்
Rate	— வீதம்
Ratio	— விகிதம், தகவு
Reaction	— எதிர்வினை, எதிர்விசை
Rectangle	— செவ்வகம்
Reduce	— சுருக்கு
Regular	— ஒழுங்கான, சீரான
,, figure	— ,, உருவம்
,, polygon	— ஒழுங்குப் பலகோணம், சீரான பலகோணம்
Relation	— தொடர்பு
Relative	— சார்ந்த
Resist	— தடு
Resistance	— தடுப்பு, தடை
Resolu ion	— பிரிப்பு, கூறுபாடு
,, of forces	— விசைப் பிரிப்பு, விசைப் பகுப்பு
Resolved parts	— பிரித்த் பகுதிகள், குத்துப் பிரிவுகள்
Rest	— அமைதி நிலை
Resultant	— (கூட்டு) விளைவு
,, force	— (கூட்டு) விளைவு விசை

Revolution — சுற்றல்
Rhombus — சாய்சதுரம்
Right angle — செங்கோணம்
Right angled triangle — செங்கோண முக்கோணம்
Right circular cone — வட்ட நேர்க்கூம்பு
Rigid — விறைப்பான, கட்டிறுக்க முள்ள
,, body — கட்டிறுக்கப் பொருள்
,, frame work — கட்டிறுக்கமுள்ள சட்டப்படல்
Ring — வளையம்
Roll — உருளுதல்
Rolling friction — உருளுராய்வு
Rotatory motion — சுழற்சியியக்கம்
Rotate — சுழலுதல்
Rotating axis — சுழலச்சு
Rough — சொரசொரப்பான
Rule — விதி

S

Sag — தொய்வு, தொய்யல்
Scalar — எண்ணி
,, quantity — எண்கணியம்
Scale — அளவுத் திட்டம்
,, Change of — அலகு மாற்றம்
Sector — வட்டக் கோணப்பகுதி
Segment — துண்டு
,, Major — பெருந் துண்டு
,, Minor — சிறு துண்டு
,, of a sphere — கோளத் துண்டு/பகுதி
Semi-axes — அரை அச்சுகள்
Semi-circle — அரை வட்டம்
Semi-diameter — அரை விட்டம்
Shape — உரு, உருவம்
Shortest distance — மீச்சிறு தூரம்
Side — பக்கம்
Sign — குறி

Similar — வடிவொத்த
Size — பருமன்
Slant height — சாயுயரம் (சாய்வு+உயரம்)
Smooth — வழவழப்பான, மழமழப்பான
Solid — திண்மம்
,, cylinder — திண்ம உருளை
Solution — தீர்வு
Solve — தீர்வு காண்
Space — இடம், வெளி
Speed — வேகம்
Sphere — கோளம்
,, Hollow — பொள்ளல் கோளம்
,, Solid — திண்மக் கோளம்
,, Hemi- — அரைக் கோளம்
,, Hollow Hemi — குழிவான அரைக் கோளம்
,, Solid Hemi — திண்ம அரைக் கோளம்
Stability — நிலைப்புத்தன்மை
Stable — உறுதியான
,, Equilibrium — உறுதிச் சமநிலை
Standard — திட்டமான
Static friction — நிலையியல் உராய்வு
Statics — நிலையியல்
Strain — திரிபு
Stress — தகைவு, உள்ளமுக்கம்
Structure — அமைப்பு
Substitute — ஈடு செய்
Sum — கூட்டுத்தொகை
Supplement — மிகைநிரப்பி, பிற்சேர்வு
Supplementary — மிகை நிரப்புகின்ற
,, angle — மிகை நிரப்புக் கோணம்
Surface — மேற்பரப்பு
,, Curved — வளைபரப்பு
,, Inner — உட்பரப்பு
,, of Revolution — சுற்றின் மேற்பரப்பு
,, Spherical — கோள மேற்பரப்பு
Symbol — குறியீடு
Symmetry — சமச்சீர்
,, axis of — சமச்சீரச்சு

T

Table	—	வாய்பாடு, அட்டவணை
Tangent (geometry)	—	தொடுகோடு, தொடுவரை
Tangent plane	—	தொடு தளம்
Tension	—	இழுவிசை
Term	—	உறுப்பு
Test	—	சோதனை
Tetrahedron	—	நான்முகத் திண்மம், நான்முகி
,, Regular	—	சீரான நான்முகத் திண்மம்/ நான்முகி
Theorem	—	தேற்றம்
Theory	—	கொள்கை
Thickness	—	மொத்தம்
Thin	—	மெல்லிய
Thrust	—	அமுக்கம்
Torsion	—	முறுக்கல்
Total	—	மொத்தம்
Transformation	—	உருவ மாற்றம், நிலை மாற்றம்
Translation	—	இடப்பெயர்ச்சி
Trapezium	—	சரிவகம்
,, Isosceles	—	இருசமபக்க சரிவகம்
Triangle	—	முக்கோணம்
,, Equilateral	—	சமபக்க முக்கோணம்
,, Isosceles	—	இருசமபக்க முக்கோணம்
,, Obtuse-angled	—	விரிகோண முக்கோணம்
,, of forces (law of)	—	முக்கோண விதி
Truncated cone	—	நுனியில் கூம்பு
,, prism	—	நுனியில் பட்டகம்

U

Uniform — ஒரு சீரான, மாருத
Uniform catenary — ஒருசீர்ச் சங்கிலியம்
Unit — அலகு
Unlike parallel forces — எதிரெதிர் இணைவிசைகள்
Unstable equilibrium — உறுதியற்ற சமநிலை

V

Value — மதிப்பு
,, Maximum — மீப்பெரு மதிப்பு
,, Minimum — மீச்சிறு மதிப்பு
Vanish — மறைதல்
Variable — மாறி
Variation — மாறல், மாறுபாடு
Vector — வெக்டர், திசையளவு
,, diagram — வெக்டர் படம்
,, quantity — வெக்டர் கணியம்
,, addition — வெக்டர் கூட்டல்
,, subtraction — வெக்டர் கழித்தல்
,, product — வெக்டர் பெருக்கல்
,, cross product — வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கல்
,, dot product — வெக்டர் புள்ளிப் பெருக்கல்
Verify — சரிபார்
Vertex — உச்சி, முனை
Virtual — கற்பித
,, displacement — கற்பிதப் பெயர்ச்சி
,, work — கற்பித வேலை
Volume — கன அளவு, பருமம்

W

Width — அகலம்
Work — வேலை

X

X-axis — X-அச்சு

Y

Y-axis — Y-அச்சு
Young's Modulus of Elasticity — யங்கின் மீள்சக்தி குணகம் (மாறிலி)

Z

Zero — பூச்சியம்